

Un Nuevo Algoritmo de Sincronización para el Sistema Caótico de Lorenz

Leonardo Acho Zuppa y Sinuhé I. Benítez

CITEDI-IPN

Av. del Parque 1310 Mesa de Otay, Tijuana B.C.

México, C.P. 22510

leonardo{simuris}@citedi.mx

Resumen— En el presente trabajo se muestra un nuevo algoritmo para sincronizar dos sistemas caóticos de Lorenz. Este nuevo algoritmo fue posible al separar el sistema de Lorenz en dos partes, donde una de ellas es global y asintóticamente estable. Después de esta descomposición, un nuevo observador fue diseñado resolviendo el problema de sincronización.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ 0.5x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ (r - 0.5)x_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g(x)} \quad (2)$$

I. INTRODUCCION

El diseño de observadores para sistemas caóticos han sido denominados como la solución al problema de sincronización para sistemas caóticos; esto es, dado un oscilador caótico (transmisor), hacer que un segundo oscilador (receptor) reproduzca, de la mejor manera posible, los estados (o vector de estado) del primero (ver referencias). En este contexto, se presenta un nuevo observador basado en la descomposición del sistema caótico de Lorenz. Usando una parte de esta descomposición, el diseño del observador fue posible usando sólo una señal transmitida del oscilador transmisor al oscilador receptor. Los esquemas de sincronización usando sólo una señal transmitida son preferibles para el diseño de sistemas de comunicación segura [3], donde, por lo general, primero se resuelve el problema de sincronización, y luego, se diseña el sistema de enmascaramiento [3].

II. DISEÑO DEL OBSERVADOR

Considere el sistema caótico de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\sigma=16$, $r=45.6$ y $b=4$. El sistema de Lorenz puede ser descompuesto como sigue:

Proposición 1: El sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f(x)$ dado en (2), es global y asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov.

Demostración: Considere la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2\sigma} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (3)$$

su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$ da:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1[x_2 - x_1] + x_2[0.5x_1 - x_2 - x_1x_3] \\ &+ x_3[x_1x_2 - bx_3] \\ &= -x_1^2 + 1.5x_1x_2 - x_2^2 - bx_3^2 \\ &= -\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - bx_3^2 < 0, \end{aligned}$$

la cuál es definida negativa, esto concluye la demostración. ♦

Proposición 1 implica que dado (3), tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0 \quad (4)$$

Proposición 2: Dado el observador

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \\ 0.5\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_3 \\ \hat{x}_1\hat{x}_2 - b\hat{x}_3 \end{pmatrix}}_{f(\hat{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ (r - 0.5)x_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g(x)}, \quad (5)$$

se resuelve el problema de sincronización.

Demostración .- Defínase $\tilde{x} = x - \hat{x}$, entonces, usando (2) y (5), obtenemos

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = f(x) + g(x) - f(\hat{x}) - g(x) = f(x) - f(\hat{x}).$$

El problema de sincronización consiste en probar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0.$$

Considere la función de Lyapunov en (3) para \tilde{x} :

$$V(\tilde{x}) = V(x, \hat{x}),$$

entonces

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} f(\hat{x})$$

y usando (4), la cual a su vez implica que

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}) < 0,$$

obtenemos que $\dot{V}(\tilde{x}) < 0$. Esto concluye la demostración. ♦

Obsérvese que el observador en (5) sólo utiliza x_1 como su única entrada, la cual es transmitida por el sistema transmisor (1).

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Los sistemas (2) y (5) fueron simulados con Simnon utilizando $x_1(0) = 100, x_2(0) = 50, x_3(0) = 80, \hat{x}_1(0) = -100, \hat{x}_2 = -50$ y $\hat{x}_3 = -80$. Los resultados numéricos son mostrados en las Figuras 1 y 2.

REFERENCIAS

- [1] Bai Er-Wei, Lonngren Karl E., and Sprott J.C., "On the synchronization of a class of electronic circuits that exhibit chaos," *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 13, pp. 1515-1521, 2002.
- [2] Boutayeb M., Darouach M., and Rafaralahy H., "Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, Vol. 49, pp. 345-349, 2002.
- [3] Cumo K. M., Oppenheim A.V., and Strogatz S. H. "Synchronization of Lorenz based chaotic circuits with application to communication," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, Vol. 40, No. 10, pp. 626-633, 1993.
- [4] Nijmeijer H. and Mareels M.V., "An observer looks at synchronization," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, Vol. 44, No. 10, pp. 882-890, 1997.
- [5] Pogromsky A., and Nijmeijer H., "Observer-based robust synchronization of dynamical systems," *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, Vol. 8, No. 11, pp. 2243-2254, 1998.
- [6] Zhong-Ping J., "A note on chaotic secure communication systems," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, Vol. 49, No. 1, pp. 92-96, 2002.

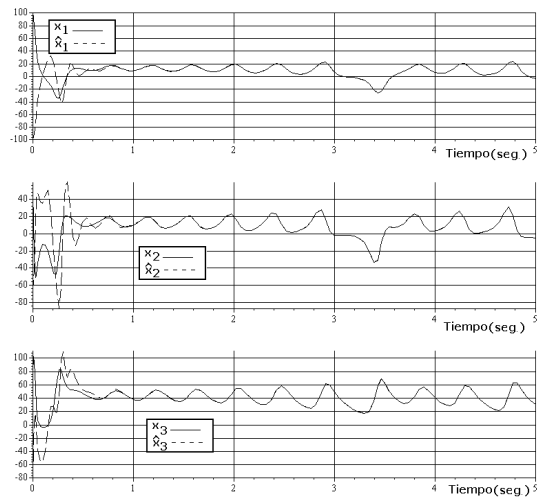


Fig. 1 Resultados numéricos.

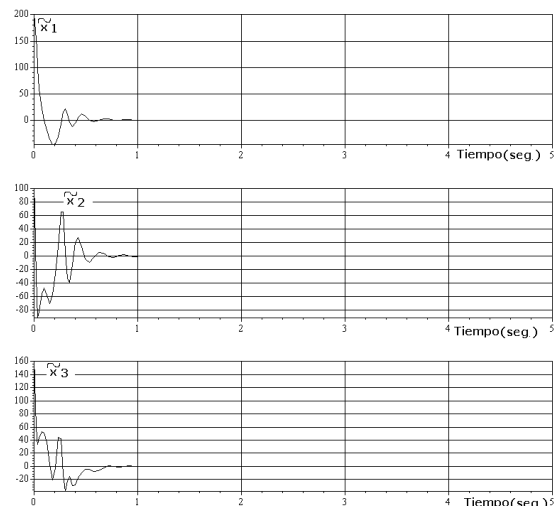


Fig. 1 Resultados numéricos.