

Estabilización de Órbitas Periódicas por Retroalimentación de la Salida Retardada en un Manipulador Subactuado

Ollin Peñaloza-Mejía¹, Joaquín Álvarez-Gallegos², Jaime Álvarez-Gallegos¹

¹ Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional,
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica.

Ap. Postal 14-740, 07000 México, D.F., MÉXICO.
{openaloz, jalvarez}@mail.cinvestav.mx

² Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada,
Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones.

Km. 107 Carretera Tijuana-Ensenada, 22860 Ensenada, B.C., MÉXICO.
jqalvar@cicese.mx

Resumen— Se considera el problema de estabilizar órbitas periódicas en un robot subactuado operando en régimen caótico. La estabilización se logra introduciendo retardos en la trayectoria de retroalimentación que corresponden al período de la órbita a estabilizar. Se presentan resultados experimentales que muestran el desempeño del controlador diseñado.

Palabras Clave — Atractor Caótico, Caos, Control de Caos, Órbitas Periódicas.

I. INTRODUCCIÓN

Las oscilaciones caóticas representan un tipo peculiar de comportamientos irregulares e impredecibles comúnmente considerados indeseables, razón por la cual se tratan de eliminar de la mayoría de las situaciones en las que se presentan. Un tema interesante en el campo de los sistemas dinámicos no lineales que ha sido abordado recientemente es el control de caos, en donde el objetivo de control consiste en estabilizar el sistema alrededor de un punto de equilibrio o de una órbita periódica.

En este trabajo se ha escogido un manipulador electromecánico subactuado que presenta una gran variedad de comportamientos en estado estacionario. El sistema es un robot planar subactuado de dos grados de libertad, conocido como Pendubot. Dado que el Pendubot puede operar en régimen caótico, el problema del control (estabilización) de órbitas periódicas inestables inmersas en el conjunto invariante caótico, es un problema que ha sido abordado recientemente mediante el uso de varias técnicas. Un trabajo previo en estabilización de órbitas en el Pendubot es el reportado en [4], el cual está basado en la técnica de control de Ott, Grebogi y York (OGY) [5].

Una técnica alternativa, muy simple comparada con el método OGY, para estabilizar órbitas periódicas inestables (OPI's) en sistemas caóticos, consiste en utilizar una retroalimentación proporcional a la diferencia entre la salida presente y la misma salida retardada un tiempo igual al período de la órbita que se quiere estabilizar. Esta técnica,

conocida como el método de Pyragas [3], presenta algunas ventajas sobre otros métodos de estabilización de OPI's basados en la técnica OGY, como se menciona en [6]. Los parámetros de diseño del controlador propuesto en el método de Pyragas son dos: la constante de retraso y la ganancia de retroalimentación.

Puesto que no existen resultados generales que garanticen la estabilidad del ciclo límite generado por el sistema en lazo cerrado, en este trabajo se ha realizado un estudio experimental para el caso particular del Pendubot cuando éste opera en régimen caótico. Se ha diseñado un esquema de control para estabilizar órbitas periódicas inestables (OPI's) empujadas en el atractor caótico. En particular, en este documento se ilustra el método de identificación y estabilización para dos OPI's distintas, a las que llamaremos OPI-1 y OPI-2, respectivamente. Sin embargo, el método es aplicable para estabilizar más OPI's de diferente período.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. La sección II plantea el problema de control de caos. La estrategia de control se describe en la sección III. Las herramientas de análisis de sistemas caóticos se dan en la sección IV. La sección V describe el sistema experimental utilizado en este estudio, mientras que su análisis y control se hace en la sección VI. Las conclusiones del trabajo se dan en la sección VII.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere que se tiene un sistema no lineal descrito por la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y \in \mathbb{R}^l$ es la salida y $u \in \mathbb{R}$ es el control. La función vectorial $f(x, t)$ se asume continuamente diferenciable. El objetivo típico de control de sistemas caóticos es la estabilización de una solución (órbita) periódica inestable empujada en el atractor.

Sea $x_*(t)$ una solución T -periódica del sistema (1) operando en régimen caótico, con $u \equiv 0$ y con condición inicial $x_*(0) = x_{*0}$. Es decir,

$$x_*(t+T) = x_*(t) \quad \forall \quad t \geq 0.$$

Como la solución es inestable, es razonable proponer el objetivo de control como una estabilización en algún sentido; es decir, llevar las soluciones $x(t)$ de (1), con $u \equiv 0$, a $x_*(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_*(t)] = 0. \quad (2)$$

El problema entonces es encontrar una función de control $u(t) = U(x)$, para asegurar que el objetivo de control (2) se cumple.

III. LA ESTRATEGIA DE CONTROL

El método de Pyragas consiste en utilizar una retroalimentación retardada, ya sea del estado o de la salida, para estabilizar una órbita τ -periódica del sistema no lineal (1).

En términos del estado, la ley de control se expresa por

$$u(t) = K[x(t) - x(t - \tau)],$$

donde K es la matriz de ganancia de retroalimentación y τ es el retraso de tiempo. El sistema controlado queda

$$\dot{x} = f(x, t) + K(x(t) - x(t - \tau)). \quad (3)$$

A. Asignación de la ganancia K

El criterio para la asignación de la ganancia de retroalimentación se basa en un resultado presentado en [2]. Para el problema de seguimiento, el resultado es el siguiente.

Teorema 1: Suponga que el sistema (1) es autónomo y $u = 0$. Sea $J(x) = f'(x) = \partial f(x)/\partial x$ la matriz Jacobiana del sistema, la cual está uniformemente acotada por una matriz constante J_0 , tal que $J(x) \leq J_0$ para todo $x(t)$ y todo $t : t_0 \leq t \leq \infty$. Entonces siempre existe una matriz constante K , tal que $[J_0 + K]$ tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa. En consecuencia, el sistema (3) converge a un ciclo límite. ■

Para la prueba del teorema, vea [2].

B. Estimación de la constante de retraso τ

El método de identificación del retardo que corresponde a la OPI que se desea estabilizar, utiliza el método del gradiente descendente (MGD). Para aplicar esta técnica, el índice de desempeño a minimizar es [2]

$$J = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|x(t_{k-1}) - x(t_{k-1} - \tau)\|^2,$$

donde $x(t_k)$ es el estado medido al instante t_k , con período de muestreo h , y n es el número total de datos usados en la serie de tiempo para la búsqueda. El gradiente se deriva como

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n [x(t_{k-1}) - x(t_{k-1} - \tau)]^T \dot{x}(t_{k-1} - \tau),$$

y se calcula

$$\tau_{i+1} = \tau_i - \beta \frac{\partial J}{\partial \tau},$$

tal que J sea mínimo.

Aunque el método anterior puede utilizarse para estabilizar una OPI de cualquier sistema dinámico, un sistema caótico tiene la propiedad de contar con un número infinito de OPI's, por lo que este método resulta muy adecuado para este tipo de sistemas. Enseguida se discute un método para determinar, a partir de la medición de alguna variable de un sistema, si éste se encuentra efectivamente en régimen caótico.

IV. ANÁLISIS DE SISTEMAS CAÓTICOS

En general, no existen soluciones analíticas para las ecuaciones que describen el fenómeno caótico. Un aspecto importante es que normalmente es posible tener la medición de al menos una de las variables del sistema y con esto analizar el comportamiento caótico utilizando series de tiempo. El método de análisis empleado se basa en el teorema de empotramiento para la reconstrucción del atractor caótico usando coordenadas retrasadas de la serie de tiempo [1].

A. Coordenadas retrasadas

La reconstrucción del atractor se realiza utilizando versiones retrasadas de una cantidad escalar s , observada desde el tiempo t_0 a un tiempo final t , como coordenadas para el espacio de estado. Sea $x(n) = s(t_0 + n\Delta t)$, $n = 1, 2, \dots$, para algún tiempo inicial t_0 y un período de muestreo Δt . De las observaciones se construye el vector

$$y(n) = [x(n), x(n+T), \dots, x(n+(d-1)T)]$$

que se utiliza como estado del sistema. El problema asociado a esta reconstrucción es la elección del retraso T y la dimensión de empotramiento $d = d_E$. Para resolver este problema se aplican los conceptos de PIM y VFC.

B. Promedio de Información Mutua (PIM)

Consideremos dos mediciones $x(n) = x_n$ y $x(n+T) = x_{n+T}$. La información mutua entre la medición x_n y la medición x_{n+T} es la cantidad aprendida por x_{n+T} acerca de x_n para algún n . El promedio de toda esta información estadística se escribe como [1]

$$I(T) = \sum_{x_n, x_{n+T}} P(x_n, x_{n+T}) \log_2 \left[\frac{P(x_n, x_{n+T})}{P(x_n)P(x_{n+T})} \right],$$

donde $P(\bullet)$ es la densidad de probabilidad de la medición en cuestión. La prescripción para determinar si los valores de $x(n)$ y $x(n+T)$ son suficientemente independientes tal que se puedan usar para reconstruir el atractor $y(n)$, es tomar T donde el primer mínimo de $I(T)$ ocurre [1].

C. Vecinos Falsos Cercanos (VFC)

En una dimensión de empotramiento que es muy baja para desdoblarse el atractor, no todos los puntos que se

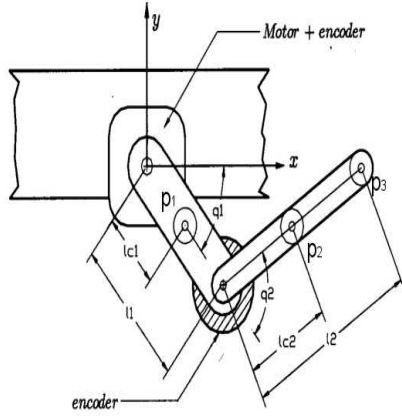


Fig. 1. Diagrama esquemático del Pendubot.

mantienen juntos serán vecinos debido a la dinámica; algunos de ellos estarán alejados y aparecerán como vecinos en esa dimensión, dado que la geometría del atractor ha sido proyectada a un espacio de dimensión inferior.

En un espacio de dimensión d , denotando el i -ésimo vecino cercano de $y(n)$ por $y_i(n)$, el cuadrado de la distancia Euclídeana entre estos dos puntos es

$$R_d^2(n, i) = \sum_{k=0}^{d-1} [x(n+kT) - x_i(n+kT)]^2.$$

En un espacio de dimensión $(d+1)$ se agrega $x(n+dT)$ como una coordenada a cada uno de los vectores $y(n)$. El cuadrado de la distancia Euclídeana en esta dimensión entre ambos puntos es

$$R_{d+1}^2(n, i) = R_d^2(n, i) + [x(n+dT) - x_i(n+dT)]^2.$$

Un criterio para encontrar vecinos falsos puede ser el incremento en distancia entre $y(n)$ y $y_r(n)$ cuando se va desde la dimensión d a la $d+1$. El incremento en distancia puede establecerse como [1]

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}^2(n, i) - R_d^2(n, i)}{R_d^2(n, i)}} = \frac{|x(n+dT) - x_i(n+dT)|}{R_d(n, i)} > R_{TH},$$

donde R_{TH} es algún umbral.

V. EL PENDUBOT

A. Descripción

El Pendubot (PENDULUM RoBOT) es un sistema electromecánico subactuado de eslabones rígidos, planar, rotacional y de dos grados de libertad. El primer eslabón (homero) es actuado directamente por un motor de CD y el segundo eslabón (codo) no cuenta con actuador. El diseño del mecanismo permite un movimiento rotacional de 360° de ambos eslabones.

Considerando el diagrama esquemático de la Fig. 1, se observa que la coordenada generalizada q_1 mide el ángulo de rotación del primer eslabón con respecto a la horizontal (eje x), mientras que la coordenada generalizada q_2 mide el

ángulo de rotación del segundo eslabón relativo al primero. El sentido positivo de las mediciones se considera contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Las longitudes a los centros de masa de cada eslabón son l_{c1} y l_{c2} respectivamente, mientras que I_1 e I_2 son los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masa.

B. Plataforma experimental

El prototipo de laboratorio a controlar consta de un manipulador subactuado de 2GDL, un servomotor de corriente directa y sensores de posición angular (codificadores ópticos), fabricado por Mechatronic Systems Inc., y que se encuentra en el Laboratorio de Control del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE.

Cada articulación cuenta con un codificador óptico para la lectura de la posición del eslabón. Uno de los codificadores se encuentra en el codo y el otro se localiza adjunto al motor de CD. Además se emplea un servo amplificador para suministrar la corriente y voltaje necesarios al motor de CD.

Para programar las leyes de control se usó una computadora personal, compatible con IBM, con una tarjeta D/A, una interfase a los codificadores y una tarjeta de temporización. Usando la biblioteca de rutinas programadas suministradas por el fabricante para las tarjetas de interface, fue posible programar los algoritmos de control directamente en Lenguaje C.

C. Modelo dinámico

Usando el formalismo de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 y sus respectivas derivadas, se obtiene la ecuación del sistema

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau^*, \quad (4)$$

donde

$$D(q) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$g(q) = [\phi_1 \quad \phi_2]^T, \quad \tau^* = [\tau_a \quad 0]^T,$$

siendo $D(q)$ la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q)$ el vector con las componentes de gravedad y τ^* el vector con las componentes de par.

Las entradas a las matrices quedan

$$\begin{aligned} D_{11} &= \Theta_1 + \Theta_2 + 2\Theta_3 \cos(q_2) \\ D_{12} &= \Theta_2 + \Theta_3 \cos(q_2) \\ D_{21} &= D_{12} \\ D_{22} &= \Theta_2 \\ C_{11} &= -\Theta_3 \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ C_{12} &= -\Theta_3 \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ C_{21} &= \Theta_3 \dot{q}_1 \sin(q_2) \\ C_{22} &= 0 \\ \phi_1 &= \Theta_4 g \cos(q_1) + \Theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \phi_2 &= \Theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

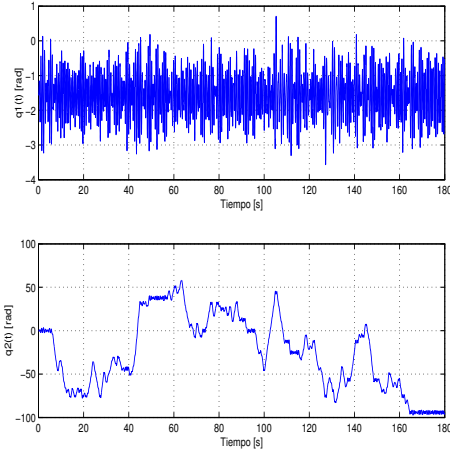


Fig. 2. Series de tiempo para ambos eslabones.

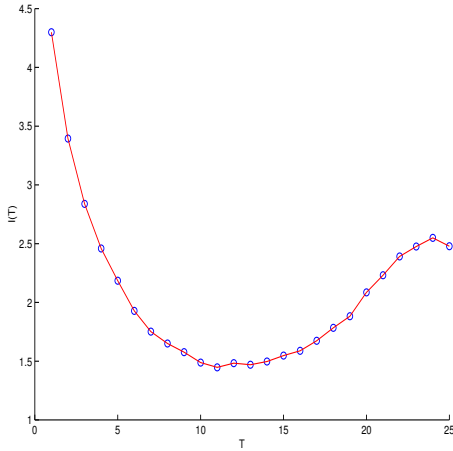


Fig. 3. Promedio de Información Mutua

donde los parámetros del sistema están agrupados de la forma

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 = 0.0308 \text{ Vs}^2 \\ \Theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 = 0.0106 \text{ Vs}^2 \\ \Theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} = 0.0095 \text{ Vs}^2 \\ \Theta_4 &= m_2 l_{c1} + m_2 l_1 = 0.2087 \text{ Vs}^2/m \\ \Theta_5 &= m_2 l_{c2} = 0.0630 \text{ Vs}^2/m\end{aligned}$$

A partir de (4), y definiendo $q_3 = \dot{q}_1$ y $q_4 = \dot{q}_2$, la ecuación de estado queda como

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ D(q)^{-1} \begin{bmatrix} \tau_a - C_{11}q_3 - C_{12}q_4 - \phi_1 \\ -C_{21}q_3 - C_{22}q_4 - \phi_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

D. Relación par-voltaje

Dado que la señal de entrada al Pendubot se maneja en forma de par, se obtuvo una relación par-voltaje a fin de tener un sistema consistente. Experimentalmente se encontró que

$$\tau_a = (l_{c1}w_1 + l_1w_2) \cos(0.8820V - 1.5708),$$

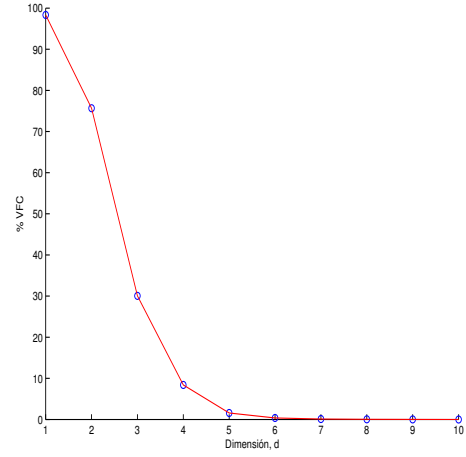


Fig. 4. Porcentaje de Vecinos Falsos Cercanos.

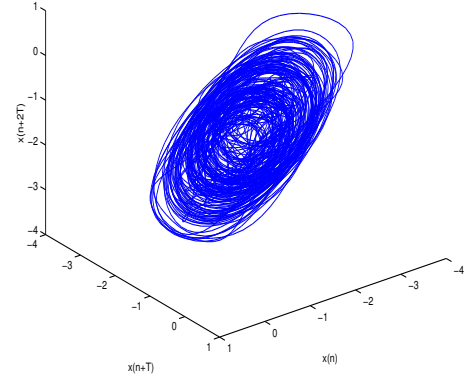


Fig. 5. Proyección del atractor reconstruido.

donde τ_a es el par aplicado y V es el voltaje suministrado por el amplificador de potencia. Los parámetros físicos del dispositivo son: $m_1 = 1.6366 \text{ Kg}$, $m_2 = 0.5512 \text{ Kg}$, $l_1 = 0.1524 \text{ m}$ y $l_{c1} = 0.0762 \text{ m}$.

VI. ANÁLISIS Y CONTROL DEL PENDUBOT

Se obtuvieron series de tiempo del Pendubot forzado para una excitación de voltaje $V = A \sin(\omega t)$, durante 180s y tomando muestras cada 16ms. A fin de obtener en los eslabones un movimiento caótico, la amplitud A se varió desde 0.1 hasta 1.4 V, y la frecuencia angular desde 2 hasta 10 rad/s. Después de 180s se obtiene un movimiento desordenado con $A = 0.5 \text{ V}$ y $\omega = 9 \text{ rad/s}$ (Fig. 2).

Tomando la serie de tiempo del eslabón 1 de la Fig. 2, el retraso para la reconstrucción del atractor es $T = 11$, de acuerdo al PIM (Fig. 3). Usando el criterio de VFC, la dimensión de empotramiento resulta ser $d_E = 5$ (Fig. 4). La proyección del atractor reconstruido se muestra en la Fig. 5.

Se estimó el máximo exponente de Lyapunov λ_1 usando el algoritmo dado en [7], resultando ser $\lambda_1 = 0.0942 \text{ bits/it}$. Este exponente positivo satisface uno de los requisitos del comportamiento caótico.

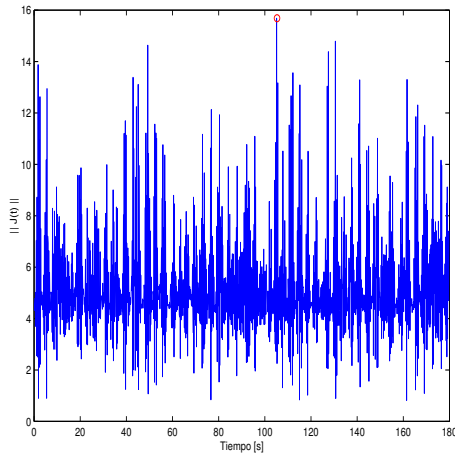


Fig. 6. Norma del Jacobiano del Pendubot forzado.

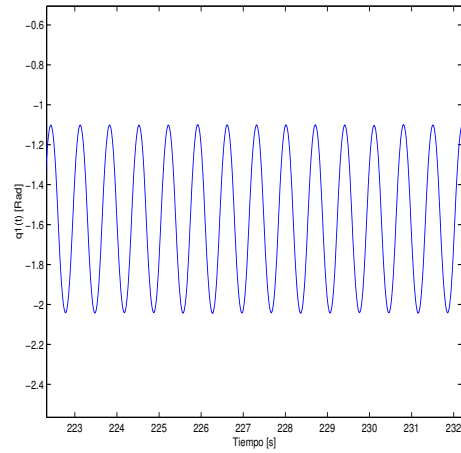


Fig. 8. Acercamiento a la serie de tiempo para OPI-1.

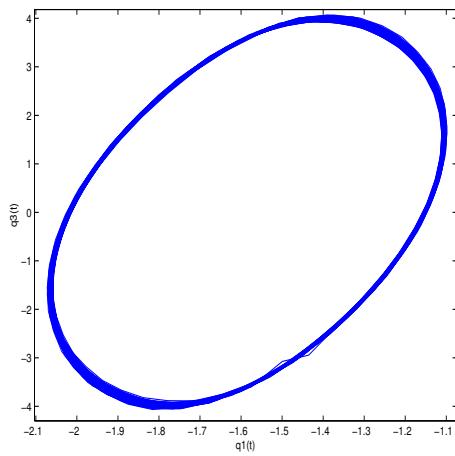


Fig. 7. Proyección de la órbita estabilizada (OPI-1).

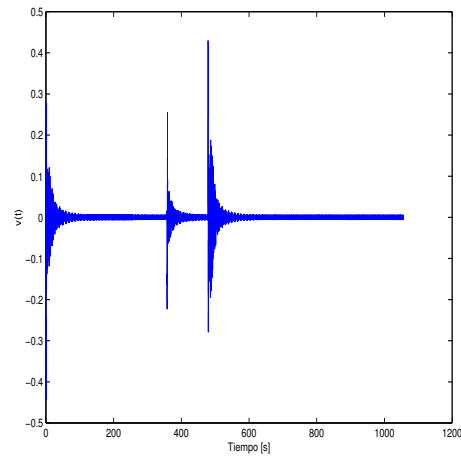


Fig. 9. Control $v(t)$ para OPI-1.

Podemos decir que el comportamiento del sistema es caótico porque [4]: (a) el PIM de la señal tiene un mínimo local, (b) el porcentaje de VFC llega a cero para una dimensión finita, (c) la geometría del atractor es regular.

A. Diseño del controlador

Con el Pendubot operando en régimen caótico, el control con retardo en la trayectoria de retroalimentación queda

$$V(t) = A \sin(\omega t) + v(t),$$

donde $v(t)$ es una perturbación que tiene que ser introducida al sistema como una retroalimentación negativa [6]. Para nuestro caso, su estructura es

$$v(t) = -k_1[q_1(t) - q_1(t - \tau)] - k_3[q_3(t) - q_3(t - \tau)].$$

Dado que sólo se usará información de dos estados (q_1, q_3), se ha proyectado el sistema a este subespacio. Se ha tomado la serie caótica del eslabón 1 para encontrar la matriz J_0 que satisface el Teorema 1. Para ello se calculó $\|J_0(t)\|$ usando la ecuación de estado del sistema y los datos experimentales de la serie de tiempo.

Como puede observarse en la Fig. 6, $\|J_0(t)\|_{max} = 15.6849$. La matriz J_0 correspondiente a este valor es

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15.6849 & -0.3221 \end{bmatrix}.$$

Luego se tiene que

$$[J_0 + K] = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 15.6849 & -k_3 - 0.3221 \end{bmatrix},$$

por lo que la condición para que los valores propios de la matriz tengan parte real negativa es

$$k_1 + k_3 > 0.3221$$

Si se hace $k = k_1 = k_3$, se tiene que satisfacer la desigualdad

$$k > 0.1611$$

El valor propuesto, $k = 0.2$, satisface esta condición.

Para la identificación del período de las OPI's se usó el MGD. Partiendo de una condición inicial $\tau_0 = 0.35$, que corresponde a la condición inmediata a la solución trivial $\tau = 0$, se estableció $\beta = 2.5$ y se empezó a calcular el índice de desempeño después de 60s, con actualizaciones

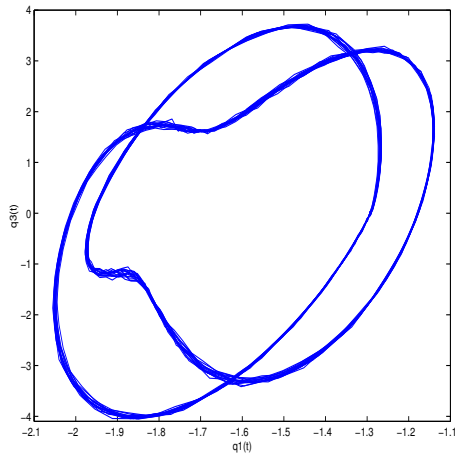


Fig. 10. Proyección de la órbita estabilizada (OPI-2).

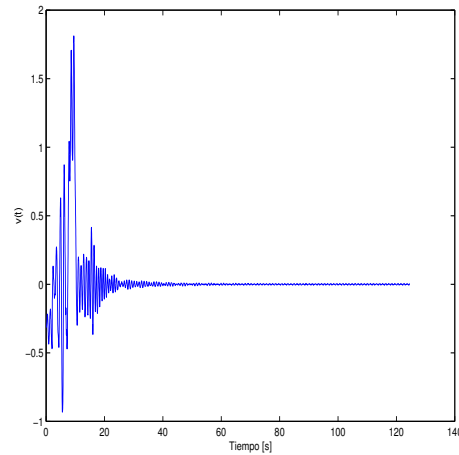
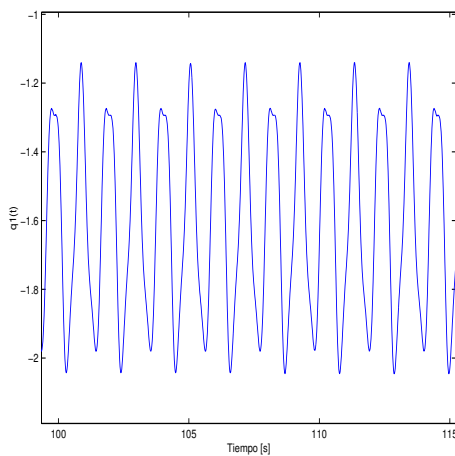
Fig. 12. Control $v(t)$ para la OPI-2.

Fig. 11. Acercamiento a la serie de tiempo para la OPI-2.

cada 0.1s; el valor de la constante de retraso después de 20 iteraciones resultó ser $\tau = 0.7460$, que corresponde al período de la OPI-1. Para la OPI-2, se realizó una estimación similar partiendo de $\tau_0 = 1$. El valor de la constante de retraso resultante, después de 35 iteraciones, fue $\tau = 2.2115$.

Para la OPI-1, la Fig. 7 muestra la proyección en el plano de fase de la órbita estabilizada. El período de la OPI-1 puede determinarse fácilmente de la Fig. 8, que corresponde al valor estimado por el MGD. El control $v(t)$ se muestra en la Fig. 9.

Para la OPI-2, las Fig. 10-12 muestran la proyección en el plano de fase de la órbita estabilizada, su serie de tiempo controlada y la magnitud del control $v(t)$, respectivamente.

VII. CONCLUSIONES

Se mostró que la dinámica a largo plazo del Pendubot es indudablemente caótica bajo ciertas condiciones de operación. Se logró estabilizar el movimiento irregular e impredecible del Pendubot forzado. Esto es, llevar las trayectorias del sistema a un movimiento ordenado y repetitivo. El método de estabilización resulta ser muy simple y fácil de implementar en cualquier sistema físico, aún cuando no

se tenga información disponible de todas sus variables.

El valor de la ganancia de retroalimentación k debe de ser capaz de compensar la divergencia de las trayectorias cercanas a la OPI. Un valor demasiado alto de k deteriorará el control. Esto está relacionado con el hecho de que la perturbación $v(t)$ sólo afecta directamente algunos estados del sistema. Para valores de k grandes los cambios en estos estados son muy rápidos y los estados restantes no tienen tiempo de seguir estos cambios.

Como se esperaba, estabilizar una OPI requirió de esfuerzos de control muy pequeños, como se muestra en las gráficas del control $v(t)$. Además, aunque no se muestran aquí, el sistema de control tuvo un buen desempeño ante perturbaciones, considerando que las trayectorias del sistema regresaron a la OPI después de un tiempo finito, y también mostró robustez frente a cambios paramétricos del sistema (masa de los eslabones).

REFERENCIAS

- [1] Abarbanel H.D.I., *Analysis of observed chaotic data*, Springer-Verlag, 1995.
- [2] Chen, Y. and Yu, X., "On time-delayed feedback control of chaotic systems", *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I*, vol. 46, no.6, 1999.
- [3] Fradkov, A. L. and R. J. Evans, "Control of Chaos: Some Open Problems", *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, 2001.
- [4] H. G. González-Hernández, J. Álvarez-Gallegos and Jq. Álvarez-Gallegos, "Stabilization of Periodic Orbits for an Underactuated Mechanical System", *En memoria del CIE 2001*, México, D.F.
- [5] Ott, E., C. Grebogi, and J. Yorke, "Controlling Chaos", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64(11), pp. 1196 - 1199, 1990.
- [6] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", *Phys. Lett. A*, vol. 170, pp. 421-428, 1992.
- [7] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A., "Determining Lyapunov Exponents from a time series". *Physica 16D*, pp. 285-317, 1985.
- [8] X. Yu and Y. Xia, "Detecting unstable periodic orbits in Chen's chaotic attractor", *Int. Journal of Bifurcations and Chaos*, vol. 10, no. 8 (2000), pp. 1987-1991.