

SUPRESIÓN DE CAOS EN UNA SUBCLASE C^K -EQUIVALENTE BAJO CONTROL ÓPTIMO

Martínez-López F. J.* Campos-Delgado D. U.**
Femat R.***

* Facultad de Ingeniería, CIEP, UASLP, México

** Facultad de Ciencias, UASLP, México

*** IPICYT, Depto. de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Computacionales, México

Resumen

En este trabajo se presenta la supresión de caos por medio de una retroalimentación dinámica basada en control óptimo lineal para un subclase de sistemas dinámicos de tercer orden. Así, se compara un controlador clásico PI con estrategias LQG/H_2 y H_∞ para analizar las mejoras en el desempeño. Una ventaja de esta formulación es que con la estrategia H_∞ es posible incorporar posibles incertidumbres en el sistema dinámico. Además se realiza un análisis de desempeño de cada uno de los controladores obtenidos mediante la simulaciones numéricas. Los resultados experimentales muestran una clara ventaja de los controladores propuestos sobre la estrategia base (PI).

Keywords: Supresión de Caos; Control Robusto; Control Optimo.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de la supresión de caos es la eliminación del comportamiento errático e impredecible que caracteriza a los sistemas caóticos (Aguirre y Billings 1995). Existen razones tanto en tecnología como en ciencia para tal fin. En lo que se refiere a tecnología, por una parte, el comportamiento caóticos puede ser indeseable en dispositivos, como en los de micropresición donde la fricción puede inducir caos. Por otra parte, la supresión de sistemas caóticos permite extensiones hacia otra áreas como la biomedicina, tal es el caso del control de arritmias usando esquemas para supresión de caos (Christini y Collins 1996). En cuanto a ciencia, se tienen dos contribuciones importantes, a saber (i) los sistemas caóticos controlados han permitido aseverar que el desorden estructurado y su relación entropía/información extienden el concepto de determinismo y (ii) a

partir de la caotificación de sistemas dinámicos (i.e., acción inversa de la supresión de caos) se han abierto preguntas hacia la dinámica de sistemas controlados por medio de retroalimentación (Colonius y Kliemann 2000)

In grosso, el problema de supresión de caos ha sido definido como la estabilización de las órbitas periódicas inestables de un atractor caótico ya en puntos de equilibrio o en órbitas periódicas (Aguirre y Billings 1995). Ahora bien, desde que Ott y colaboradores (1990) publicaron su trabajo sobre supresión de caos en sistemas alineales, diversos esquemas de control han sido reportados; así hay aproximaciones clásicas tanto continuas como discretas. Algunos controladores han sido diseñados bajo consideraciones de robustez ante errores en modelo e inclusive para garantizar estabilidad a pesar de ruido. Otros se han propuesto como aproximaciones robustas a la retroalimentación de estados (Femat *et al.* 1999a) y

unos cuantos mas han sido diseñados en dominio de la frecuencia (Luna y Femat 2000). En este sentido, se ha mostrado que controladores con acciones integrales de primer orden son capaces de estabilizar a sistemas caóticos en puntos fijos y órbitas estables de baja frecuencia. Además, se ha mostrado que acciones integrales de orden superior permiten su estabilización en órbitas sin importar su frecuencia (Femat *et al.* 1999b). No obstante, el costo energético que se suele pagar en tales acciones de control puede impedir su implementación.

Así las cosas, se abre el siguiente problema: ¿Es posible diseñar una ley de control basada en retroalimentación de salidas con características de robustez y criterios de optimalidad para suprimir caos?. El problema no es trivial si consideramos que (i) actualmente está abierta, en teoría de control, la discusión en cuanto a la relación de optimalidad, robustez y estabilidad, (ii) los sistemas caóticos son por constitución alineales con un espectro continuo de frecuencias fundamentales y, además, (iii) son altamente sensibles a condiciones iniciales y variaciones paramétricas.

En este trabajo se diseñan supresores de caos en dominio de la frecuencia bajo criterios de optimalidad: H_2 y H_∞ . Estos son comparados con un control PI usando la misma función de costo para el diseño. La idea detrás de los resultados es que se pueden diseñar controladores robustos y subóptimos para mejorar el desempeño del lazo cerrado al suprimir caos. Una sub-clase de osciladores caóticos C^k -*equivalentes* están contenidos en esta investigación (Malasoma 2002). Tal clase de osciladores incluyen al circuito de Chua y a los propuestos por Sprott (2000). Se muestra que los controladores diseñados permiten suprimir caos.

El trabajo presentado se ha organizado de la manera siguiente. En la Sec. 2 se realiza la descripción del sistema con el cual se realizó el estudio. Una breve descripción de algunas técnicas de control lineal aplicadas en este trabajo se presentan en la Sec. 3. En la Sec. 4, se lleva a cabo la síntesis de los controladores propuestos, como también la presentación de los resultados obtenidos en la implementación experimental de cada uno de ellos. Por último se presentan las observaciones y conclusiones de este trabajo en la Sec. 5.

2. DESCRIPCIÓN DEL OSCILADOR

Los sistemas dinámicos requieren cierto grado de complejidad para exhibir caos, en general los sistemas no lineales que presentan dinámica caótica se dividen en dos tipos:

- Sistemas que a través de la modificación de alguno o algunos de sus parámetros internos

se induce el comportamiento caótico (excepto sistemas dinámicos de segundo orden).

- Sistemas que por medio de una perturbación externa se genera el comportamiento caótico.

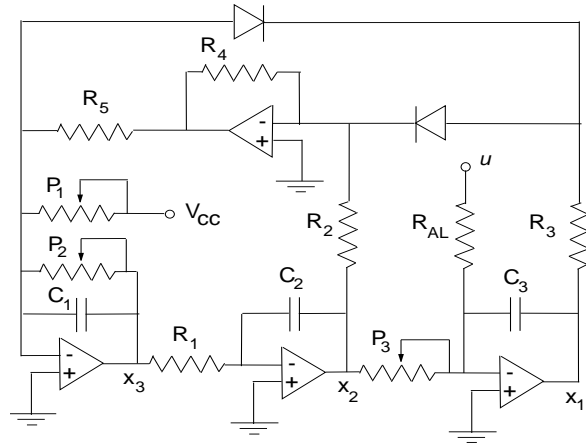


Figura 1. Diagrama del circuito oscilador caótico

El sistema con el que se desarrolló el presente trabajo cuenta con tres estados y con un término no-lineal estático. Este sistema puede ser escrito como una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de tercer orden en una sola variable como se ve en la Ec. 1 (Sprott 2000).

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = G(x), \quad (1)$$

donde $G(x)$ es la función que proporciona la no linealidad del sistema, la cual es una función lineal a trozos, y A y B son los parámetros de bifurcación del oscilador. Notar que el oscilador de Chua también puede ser descrito en la forma canónica de la Ec. 1. Estos sistemas muestran diferente comportamiento dinámico dependiendo de sus parámetros. Además permiten una detallada comparación de la fase experimental con la teoría ya que pueden ser implementados por medio de circuitos eléctricos. El circuito oscilador caótico usado en este trabajo es el mostrado en la Fig. 1. El modelado matemático correspondiente al circuito mostrado es el descrito por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{x_2}{P_3 C_3} - \frac{u}{R_{AL} C_3} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_3}{R_1 C_2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{|x_1|}{R_3 C_1} + \frac{R_4 x_2}{R_2 R_5 C_1} - \frac{x_3}{P_2 C_1} - \frac{15}{P_1 C_1} \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (2)$$

donde $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_{AL} = 1k\Omega$, $C_1 = C_2 = C_3 = 100\mu F$, P_1 es una resistencia variable que modifica directamente la dimensión del atractor y tanto P_2 como P_3 se seleccionan tal que el sistema presente dinámica caótica. R_{AL} es la resistencia a través de la cual es posible

retroalimentar la acción de control u al circuito. La lectura de salida corresponde a la medición de voltaje en el estado x_1 . Nótese que el oscilador

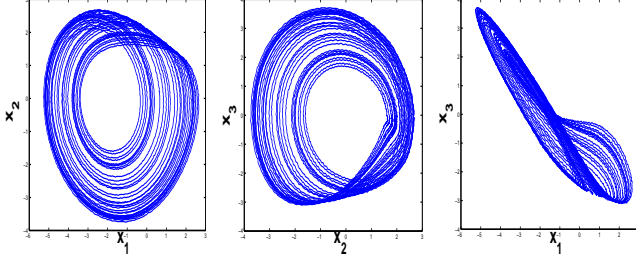


Figura 2. Proyecciones del diagrama de fase de los datos experimentales

presenta dos puntos de equilibrio en $(\pm \frac{15R_3}{P_1}, 0, 0)$ que dependen de P_1 . Los potenciómetros fueron fijados en los siguientes valores $P_1 = 8.95k\Omega$, $P_2 = 1.67k\Omega$ y $P_3 = 957\Omega$. Para estas condiciones ambos puntos de equilibrio son inestables. Las proyecciones del diagrama de fase de los datos arrojados por el circuito experimental son mostradas en la Fig. 2.

3. SUPRESIÓN DE CAOS POR RETROALIMENTACIÓN LINEAL

El estudio de control de caos comprende dos problemas básicos

- Supresión de la dinámica caótica
- Sincronización de caos

Este trabajo se centra en la supresión de caos sobre el oscilador caótico descrito en la Ec. 1 mediante una acción de control lineal a lazo cerrado. Más allá, se busca sintetizar controladores basados en un modelo del sistema, de esta manera utilizar el conocimiento de la planta para mejorar la repuesta a lazo cerrado. Por lo tanto se busca investigar las ventajas que pueden tener técnicas de control óptimo sobre un controlador clásico PI, en término de desempeño y robustez. Ahora es necesaria la linealización del oscilador en un punto de operación. Así, se escogió la linealización en el punto de equilibrio $(\frac{15R_3}{P_1}, 0, 0)$, lo cual resultó en

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{P_3 C_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{R_1 C_2} \\ 1 & \frac{R_4}{R_2 R_5 C_1} & \frac{-1}{P_2 C_1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_{AI} C_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] X + [0]u \quad (3)$$

Este sistema es inestable, por lo que se puede ver el problema de supresión como un problema de estabilización para el sistema lineal (Femat *et al.* 1999b).

3.1 Controlador Clásico Proporcional Integral

Un controlador clásico proporcional-integral (PI) cuenta con dos tipos de estructuras de control: *Acción proporcional e integral*; por lo que cuenta con dos grados de libertad en su diseño. La ecuación de la acción de control está dada por la combinación de los factores descritos llevándonos a:

$$u(s) = k_c \left[1 + \frac{1}{\tau s} \right] e(s), \quad (4)$$

donde la constante τ representa el tiempo de restauración del comando de control, k_c la ganancia del controlador y e es el error entre el estado retroalimentado, y la señal de referencia $e = r - y$. Las ganancias k_c y τ se asignan de tal manera que el sistema a lazo cerrado sea estable y mantenga cierto desempeño.

3.2 Controlador LQG/ H_2

El problema de control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG) se define como encontrar una ley de control que minimice la función de costo:

$$J = \lim_{T_o \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} [x^T Q x + u^T R u] dt \right\} \quad (5)$$

Utilizando el principio de separación, el problema de control LQG puede ser decompuesto en dos subproblemas (Lewis y Syrmos 1995):

- Aplicación del problema determinístico LQR (Regulador Cuadrático Lineal)

$$\min_u \lim_{T_o \rightarrow \infty} \int_0^{T_o} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (6)$$

cuya solución requiere una ley de control basada en retroalimentación de estados.

- Obtener un estimado óptimo \hat{x} de los estados x que minimicen

$$E \{ (x - \hat{x})^T (x - \hat{x}) \} \quad (7)$$

usando la teoría del filtro Kalman.

3.3 Controlador H_∞

El sistema dinámico de la Ec. 2 puede presentar diferencias o errores por simplificaciones o consideraciones en su modelado matemático. Esta descripción de incertidumbres depende por completo de nuestra experiencia en el diseño y caracterización de dinámicas no modeladas (Zhou y Doyle 1998). Una forma de describir el tamaño de la

incertidumbre $\Delta \in RH_\infty$ es por la norma $\|\cdot\|_\infty$. Así, es común utilizar la transformación lineal fraccional (LFT), ver Fig. 3, para representar el problema de síntesis/análisis con incertidumbre. Los modelados de incertidumbre que comunmente

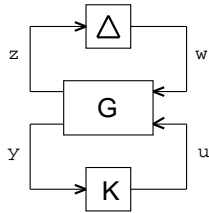


Figura 3. Diagrama general para el problema H_∞

son usados son el aditivo $\hat{P} = P_o + W\Delta$, multiplicativo $\tilde{P} = P_o(I + W\Delta)$ y la factorización coprime $\hat{P} = (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1}(\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)$ con $P_o = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ que representa la planta nominal, W es una función de peso y $\|\Delta\|_\infty < 1$. Este tipo de representaciones de incertidumbres son utilizadas para la síntesis de controladores basados en el *Teorema de la ganancia pequeña* (Zhou y Doyle 1998). Para el cual si T_{zw} representa la interconexión entre la planta G y el controlador K , ver Fig. 3, un controlador diseñado para maximizar la tolerancia a incertidumbres y perturbaciones es decir para proporcionar estabilidad robusta, es necesario que minimice $\|T_{zw}\|_\infty$ manteniendo estabilidad interna de lazo cerrado. Si además de estabilidad robusta son incluidas especificaciones de desempeño, es necesario un controlador que garantice desempeño robusto ante incertidumbre. Una de las técnicas para atacar este tipo de problemas es μ -síntesis.

Los pasos principales para el diseño de un controlador en H_∞ son: (1) Identificar el objetivo de control (Desempeño y/o estabilidad robusta); (2) Seleccionar las funciones de peso; (3) Obtener la representación en LFT del sistema; y (4) Calcular el controlador. El cómputo del controlador H_∞ es posible realizarlo usando MATLAB © (μ -Analysis and Synthesis Toolbox, o LMI Control Toolbox).

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los resultados de la implementación de los controladores sintetizados son presentados a continuación. Estos resultados fueron obtenidos mediante la implementación experimental del lazo retroalimentación de la acción de control sobre el circuito oscilador caótico descrito. Los controladores fueron implementados a través del sistema dSpace 1104©. A continuación se muestra la dinámica del estado retroalimentado x_1 representando por una medición de voltaje, ver Fig. 1. Además se presenta la acción de control u implementada para

cada controlador, siendo esta última también una medición de voltaje alimentado a través de una resistencia R_{AL} (ver Ec. 2). Para la síntesis de los controladores robustos basados en H_∞ se asume un 5% de incertidumbre en los valores reales de las resistencias y capacitores que componen el circuito, es decir

$$\begin{aligned} R_i &= R_{oi}(1 + 0.05\delta_{R_i}) & -1 \leq \delta_{R_i} \leq 1 \\ C_i &= C_{oi}(1 + 0.05\delta_{C_i}) & -1 \leq \delta_{C_i} \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

donde R_{oi} y C_{oi} representan los valores nominales de cada elemento. Pevio a cada implementación experimental se realizó la simulación correspondiente en Matlab. Obteniendo una buena correlación entre simulación e implementación experimental. Notar que el oscilador se estabilizara en un punto de equilibrio que puede ser no necesariamente el origen. Esto dependerá del punto en el espacio fase en el que se encuentre la trayectoria del sistema al activar la acción de control. En los resultados experimentales mostrados se omiten las gráficas de los estados x_2 y x_3 por limitaciones de espacio. Sin embargo, se puede mencionar que la dinámica caótica también se suprime al activar la retroalimentación de control.

4.1 Síntesis de un controlador clásico PI

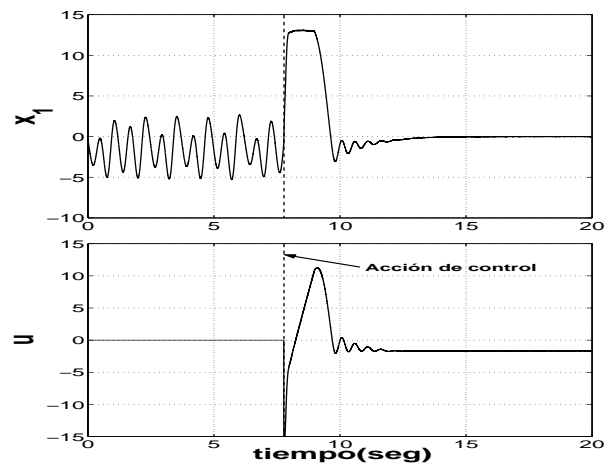


Figura 4. Respuesta de lazo cerrado: controlador PI

Como se mencionó anteriormente ya se ha demostrado que con un controlador obtenido a partir de la combinación de la acción proporcional e integral (PI), es posible la supresión de la dinámica caótica (Femat *et al.* 1999b), (Luna y Femat 2000). A partir de la teoría de control clásico PI y considerando el tiempo de restauración del comando de control $\tau = 1$ es posible obtener la ganancia k_c a través del proceso analítico de Routh-Hurwitz, tal que garantice estabilidad en el sistema a lazo cerrado. Así, se obtuvo un valor de $k_c = 1.125$. Con lo cual es posible obtener un controlador

con estructura similar a la Ec. 4. Obteniendo con la retroalimentación de la acción de control la dinámica de cada uno de los estados mostrados en la Fig. 4.

4.2 Síntesis de un controlador en LQG/H₂

Considerando la teoría de diseño de control LQG/H₂, y a partir de la consideración de que el vector de peso se encuentra más cargado en el estado a retroalimentar, se obtiene la matriz de ganancia óptima de retroalimentación F usando (LQR). Además, se diseñó un estimador tipo Kalman, y obteniendo la ganancia de dicho estimador L . Es posible entonces obtener un controlador tipo observador a partir de $K(s) = (A + BF + LC + LDF, -L, F, 0)$. Los resultados obtenidos en la implementación experimental son presentados en la Fig. 5.

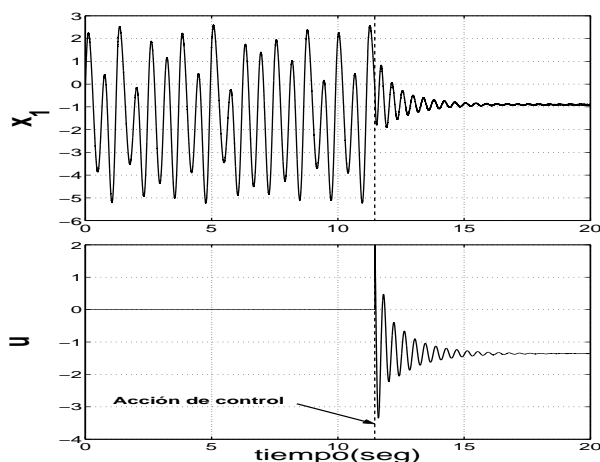


Figura 5. Respuesta de lazo cerrado: controlador LQG/H₂.

4.3 Síntesis de un controlador en H_∞ (Modelado Multiplicativo)

Basandonos en la teoría sobre incertumbres no estructuradas y considerando un modelado multiplicativo (MM) $\hat{P} = \{P_0(1 + W_m\Delta), \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$ es posible obtener la función de peso W sobre la incertumbre del sistema. Esto se obtiene a través de un análisis en el dominio de la frecuencia (Zhou y Doyle 1998). Enseguida se realiza el cómputo de un controlador estabilizador robusto a través de la LFT de la planta generalizada. Por lo tanto, se busca resolver el siguiente problema de síntesis

$$\min_K \|KP(I + KP)^{-1}W\|_\infty \quad (9)$$

La implementación experimental arrojó los resultados mostrados en la Fig. 6.

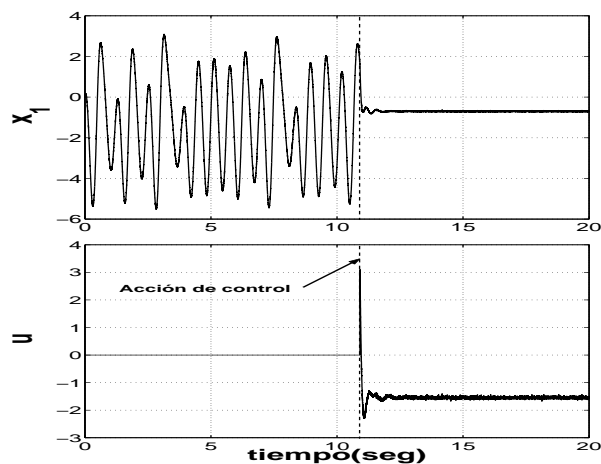


Figura 6. Respuesta de lazo cerrado: controlador MM

4.4 Síntesis de un controlador en H_∞ (μ síntesis)

Considerando incertidumbre paramétrica en los elementos del circuito, ver Ec. 8, y llevandolas a una Transformación Fraccional Lineal (LFT) es posible mediante la teoría de μ -síntesis obtener un controlador que establezca el sistema robustamente como se muestra en la Fig. 7. Más allá, se busca obtener desempeño robusto para seguimiento de trayectorias. Por lo que se busca minimizar el error $e = r - y$ con respecto de r , considerando la incertidumbre Δ en el sistema. Así, el bloque de incertidumbre tiene la siguiente estructura $\Delta = \text{diagonal}([\delta_{C_1} \ \delta_{C_2} \ \delta_{C_3} \ \delta_{R_1} \ \delta_{R_2} \ \delta_{R_3} \ \delta_{R_4} \ \delta_{R_5}])$ donde $\delta_{R_i}, \delta_{C_i} \in [-1, 1]$.

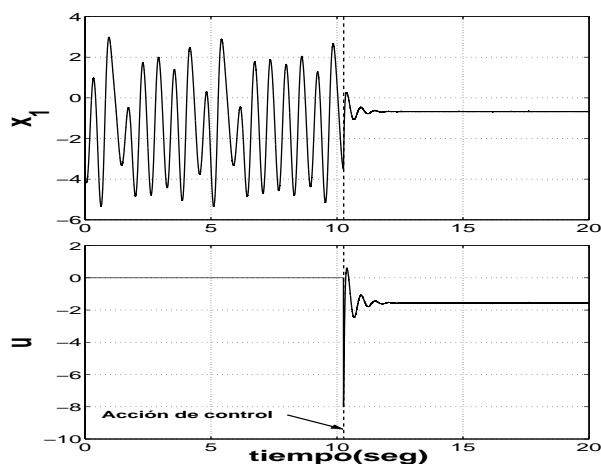


Figura 7. Respuesta de lazo cerrado: controlador μ -síntesis

4.5 Análisis de desempeño

Considerando el modelado matemático del sistema dinámico y realizando las **simulaciones** en Matlab-Simulink correspondientes al sistema bajo la acción de control de cada controlador obtenido, es posible realizar un análisis de desempeño

para cada uno de los sistemas resultantes a un mismo tiempo t_o , resultados que se muestran en el Cuadro 1. En este último se describen las características principales de la acción de control u sobre el sistema dinámico. De la misma manera se analiza el desempeño con respecto a la variable controlada x_1 en el Cuadro 2. Ahora, para analizar la robustez de los controladores propuestos, se utiliza el marco de trabajo LFT de la Fig. 3. considerando incertidumbre paramétrica según la Ec. 8. Por lo que cerrando el lazo inferior se obtiene la función de transferencia de w a z dada por $T_{zw} = F_l(G, K)$ (Zhou y Doyle 1998). Así, el grado de robustez esta dado por la tamaño de la incertidumbre Δ permitida tal que el sistema interconectado todavía mantenga estabilidad interna: $\|\Delta\|_\infty < 1/\|T_{zw}\|_\infty$. En el análisis de

Cuadro 1. Características de desempeño con respecto a la variable de control u

	sobretiro	(t_s)	(E)	$\ T_{zw}\ _\infty$
PI	15.0	8.82	6.465	20.026
LQG/H_2	4.6091	8.96	1.129	2.269
MM	7.6481	1.93	1.449	2.405
μ SINT.	3.3255	1.78	1.453	2.229

Cuadro 2. Características de desempeño con respecto a la variable regulada x_1

	sobretiro	(t_s)
PI	15.0	8.85
LQG/H_2	1.98	8.49
MM	1.13	1.32
μ SINT.	0.99	1.28

desempeño, se definen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 |\text{sobretiro}| &= \max_{t_{on} < t < t_{sim}} |z(t)| \\
 t_s &= \max_{t_{on} < t < t_{sim}} \{|z(t) - z_{ss}| \geq 0.05\} \\
 E &= \frac{1}{t_{sim} - t_{on}} \int_{t_{on}}^{t_{sim}} z^2(t) dt, \quad (10)
 \end{aligned}$$

donde $z(t)$ representa la variable analizada después de activar la acción de control, z_{ss} su valor de estado estable, t_{on} el tiempo de activación del controlador y t_{sim} el tiempo total de simulación. Con los resultados obtenidos es posible comparar el desempeño nominal de cada controlador observando el sobretiro, tiempo de estabilización y la energía absorbida o proporcionada por la acción de control. Así como también es posible determinar la robustez que proporciona cada uno de los controladores. Notando que el controlador con menor grado de robustez y desempeño más pobre es el PI.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se logró la supresión de caos en sistemas dinámicos de tercer orden retroalimenta-

dos demostrando que, además de un controlador clásico PI, es posible suprimir la dinámica caótica empleando técnicas de control óptimo LQG/H_2 y de control robusto (H_∞) a través de diferentes representaciones de las incertidumbres paramétricas del sistema. En la tabla es posible observar además la gran diferencia en cuanto a la robustez del controlador clásico PI con los resultados obtenidos de los controladores restantes, destacando también el sobretiro de la acción estabilizante del mismo controlador. Es posible observar un mayor grado de robustez y mejor desempeño nominal empleando la teoría de μ -síntesis con la LFT correspondiente a la representación de las incertidumbres paramétricas. Determinando también que un controlador clásico PI puede suprimir la dinámica caótica pero no es lo suficientemente robusto como los obtenidos en H_2 y H_∞ , además de contar con el peor desempeño nominal.

REFERENCIAS

- L.A. Aguirre y S.A. Billings. Closed-loop suppression of chaos in nonlinear driven oscillators. *J. Nonlinear Sci.*, **5**(1995), 189-206.
- D.J. Christini y J.J. Collins. Using chaos control and tracking to suppress a pathological nonchaotic rythm in a cardiac model. *Phys. Rev. E*, **53**(1996), 49-52.
- F. Colonius y W. Kliemann. *The dynamics of Control*, Birkhäuser, 2000, USA.
- M. Ding, W. Yang, V. In, W.L. Ditto, M.L. Spano y B. Gluckman. Controlling chaos in high dimensions: Theory and experiment. *Physical Review E*, **53**(1996), 4334-4344.
- R. Femat, J. Alvarez-Ramírez B. Castillo-Toledo y J. Gonzáles. On robust chaos suppression in Class of Nondriven Oscillators: Application to the Chua's circuit. *IEEE Transactions on circuits and systems*, **46** (1999), 1150-1152.
- R. Femat, J. Capistrán-Tobias y G. Solís-Perales. Laplace domain controllers for chaos control. *Physics Letters A*, **252**(1999), 27-36.
- F.L. Lewis y V.L. Syrmos. *Optimal Control*, Jonh Wiley & Sons Inc., 1995.
- M. Luna-Rivera y R. Femat. Estudio en frecuencia de sistemas caóticos controlados. *Revista Mexicana de Física*, **46**(2000), 429-439.
- J.M. Malasoma. A new class of minimal chaotic flow. *Physics Letters A*, **305** (2002), 52-58.
- E. Ott, C. Grebogi y J.A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Letts*, **64**(1990), 1196-1199.
- J.C. Sprott. A new class of chaotic circuit. *Physics Letters A*, **266**(2000), 19-23.
- L.A.B. Torres y L.A. Aguirre. Inductorless chua's circuit. *Electronics Letters*, **36**(2000), 1915-1916
- K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall Inc., 1998.