

Estabilización global asintótica de un modelo de avión PVTOL con retardo en los controles^{*}

R. Francisco^{**}

Depto. de Control Automático,
CINVESTAV-IPN. A.P. 14-740. 07360,
México D.F.
email: rfrancisco@ctrl.cinvestav.mx

S. Mondié

Depto. de Control Automático,
CINVESTAV-IPN. A.P. 14-740. 07360,
México D.F.
email: smondie@ctrl.cinvestav.mx

F. Mazenc

INRIA Lorraine, Projet CONGE,
ISGMP Bât A, Ile du Saulcy,
57 045 Metz Cedex 01,
Francia

Resumen

En este trabajo se resuelve el problema de estabilización del modelo del avión PVTOL mediante la metodología de feedforward, cuando la ley de control es acotada y retardada.

Palabras claves. Estabilización, retardo, sistemas feedforward, sistemas no lineales.

1. Introducción

Los sistemas Feedforward son una clase de sistemas no lineales con una estructura triangular específica. El problema de la estabilización global asintótica de estas ecuaciones triangulares ha sido estudiado por muchos investigadores [10, 1, 2] en el caso sin retardo durante la última década. Algunos de estos sistemas son el 'Carro-péndulo' (ver [4]), la 'Bola y la viga' con un término de fricción (ver [9]), el sistema 'TORA' (ver [9]) y el 'PVTOL' (*Planar Vertical Takeoff and Landing Aircraft*), (ver [1], [10]). En este tipo de dispositivos es común de que aunado a la problemática de limitaciones en actuadores, se presenten retardos causados por el tiempo de cómputo de la ley de control o del observador, así como retardos ligados a los sensores de posición tales como cámaras y algoritmos de visión.

El problema de retardo en la entrada fue abordado en [5], para el caso de cadenas de integradores de longitud n y para el caso de sistemas en la forma feedforward en [7]. En ambas contribuciones se propusieron

leyes de control para la estabilización global asintótica. En este trabajo se emplean estos resultados para la estabilización de un modelo PVTOL cuando la entrada de controles es sujeta no solo a una cota pero también a un retardo.

El modelo de la plataforma del avión PVTOL ha sido estudiado extensamente por varios investigadores para el caso sin retardo. Hauser [1] en 1992 desarrolló una aproximación mediante un procedimiento de linealización entrada-salida que produce un seguimiento acotado y la estabilización asintótica del avión V/STOL. Andrew R. Teel [10] en 1996 obtuvo un resultado sobre el teorema de pequeñas ganancias no lineales. El estableció un algoritmo para la estabilización de sistemas no lineales en la forma feedforward donde ilustró su resultado con el ejemplo del avión PVTOL. En 1996 Martin [3] propuso una extensión del resultado propuesto por Hauser, encontrando una salida plana para el sistema y partir el problema de seguimiento de la salida en dos pasos: en primer lugar, diseñar un seguimiento del estado basado en la linealización exacta usando la salida plana y en segundo lugar, diseñar un generador de trayectoria para alimentar al seguimiento del estado. Un artículo importante sobre el control del avión PVTOL apareció en 1992. Lin [2] estudió el control robusto del PVTOL, donde se diseñó una retroalimentación no lineal de estado mediante las propiedades del control óptimo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan los resultados previos que son de utilidad en nuestro análisis. En la sección 3 se describe el modelo simplificado del PVTOL estudi-

^{*}Proyecto CONACYT 41276-Y

^{**}Becario CONACYT 158335

ado en este trabajo. Se presenta el diseño de la ley de control para el avión PVTOL en la sección 4. En la sección 5 se ilustran los resultados obtenidos en simulación. Se concluye el trabajo con algunas observaciones en la sección 6.

2. Resultados previos

A continuación se enuncian los resultados sobre la estabilización asintótica global de cadenas de integradores de longitud n y de una clase de sistemas en forma feedforward presentados en [5] y [7] respectivamente.

Teorema 1 [5] *Sea la cadena de integradores de dimensión n*

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= y_{i+1}(t), i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{y}_n(t) &= u(t-\tau), \end{aligned} \quad (1)$$

donde $y_i \in \mathbb{R}$ son los estados, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada y $\tau > 0$ es el retardo. Sea la ley de control

$$\begin{aligned} u(t-\tau) &= -\bar{\sigma}_n(x_n(t-\tau) + \bar{\sigma}_{n-1}(x_{n-1}(t-\tau) + \\ &\dots + \bar{\sigma}_2(x_2(t-\tau) + \bar{\sigma}_1(x_1(t-\tau))) \dots)), \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$x_{n-i} = \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} y_{n-j}; \quad i = 0, \dots, n,$$

y $\bar{\sigma}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de saturación que satisface

- $\bar{\sigma}_i(s) = s$, para $|s| < \bar{M}_i$ y
- $\bar{\sigma}_i(s) = \bar{M}_i$ para $s \geq \bar{M}_i$, $\bar{\sigma}_i(s) = -\bar{M}_i$ para $s \leq -\bar{M}_i$,

donde \bar{M}_i son constantes reales positivas, tales que $\frac{1}{8}\bar{M}_{i+1} \leq \bar{M}_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Entonces el sistema en lazo cerrado (1),(2) es global uniforme asintóticamente estable.

Las cadenas de integradores son un caso particular de sistemas en forma feedforward. La explotación de la metodología recursiva empleada en la prueba aunada a cambios de variables de estado y control, reescalamiento en el tiempo, y resultados de robustez, permitió extender el uso de esta estrategia de control a la estabilización de una clase de sistemas en forma feedforward [7].

Teorema 2 [7] *Sea el sistema en la forma feedforward*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + h_1(x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + h_2(x_3(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) + h_{n-1}(x_n(t)), \\ \dot{x}_n(t) &= u(t-\theta), \end{cases} \quad (3)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada, $\theta \geq 0$ es el retardo y donde cada función $h_i(\cdot)$ es de clase C^2 y de orden 2 en el origen que satisfacen la condición

$$|h_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)| \leq M(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \dots + x_n^2) \quad (4)$$

donde M es un número real positivo, para $|x_j| \leq 1$, $j = i+1, \dots, n$,

Considere la ley de control acotada en norma

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{L}{Mk^n} \sigma_n(p_n(k^{n-1} \frac{M}{L} x_n) + \dots \\ &+ \sigma_{n-1}(p_{n-1}(k^{n-2} \frac{M}{L} x_{n-1}, k^{n-1} \frac{M}{L} x_n) + \dots \\ &+ \sigma_1(p_1(\frac{M}{L} x_1, \dots, k^{n-2} \frac{M}{L} x_{n-1}, k^{n-1} \frac{M}{L} x_n))) \dots) \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$p_i(\cdot) = \frac{M}{L} \sum_{j=i}^n \frac{(n-i)!}{(n-j)!(j-i)!} x_j^{i-1},$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_i(r) &= \varepsilon_i \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_i} r\right), \\ 1 &= 20\varepsilon_n = 20^2\varepsilon_{n-1} = \dots = 20^n\varepsilon_1 \end{aligned}$$

donde $\sigma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de saturación que satisfacen

- $\sigma_i(\cdot)$ es impar, creciente y $\sigma(0) = 0$.
- $\sigma(\cdot)$ es de clase C^1 .
- $0 \leq \sigma'_i(s) \leq 1 \forall s \in \mathbb{R}$.

y finalmente

$$k \geq \frac{\theta}{\min \left\{ \frac{1}{16n^3 [4n\sqrt{n}(1+n^2)^{n-1} + 1]^2}, \frac{1}{4 \cdot 20^{n+1} n(n+2)} \right\}}, \quad (6)$$

$$0 < L \leq \min \left\{ \frac{\eta k}{n^3 (n!)^3}, \frac{Mk}{(n+1)!}, M \right\}, \quad (7)$$

$$0 \leq \eta \leq \min \left\{ \frac{1}{8(1+n^2)^{n-1}}, \frac{1}{10 \cdot 20^n n} \right\}. \quad (8)$$

Entonces, la ley de control (5) estabiliza global asintóticamente el sistema (3).

3. Modelo del PVTOL (Planar Vertical Takeoff and Landing Aircraft)

El control de aviones es un campo de interés en control, sin embargo, dada la complejidad de estos sistemas es conveniente estudiar modelos simplificados que contemplan un numero reducido de variables de estado y control pero que capturan los aspectos esenciales del sistema para efectos de control. A continuación, se presenta un modelo simplificado para el PVTOL y se plantea el problema de control considerado.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_1(t - \tau_1) \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= u_1(t - \tau_1) \cos \theta - 1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= u_2(t - \tau_2). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

donde x es la posición horizontal, y la altitud, u_1 , u_2 son las entradas, $\tau_2 \geq \tau_1 \geq 0$ son los retardos. Las variables de control u_1 es el empuje o la fuerza de propulsión (dirigido fuera del fondo del control) y la variable de control u_2 es el momento del balanceo.

Note que para $u_1 = u_2 = 0$, el origen es punto de equilibrio, es decir $(x_1, x_2, \theta, \omega, y_1, y_2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Nuestro objetivo de control es estabilizar el sistema en el punto de equilibrio. En una etapa posterior se estabilizará el sistema en una posición deseada $(x_1, x_2, \theta, \omega, y_1, y_2) = (0, 0, y_d, 0, 0, 0)$, donde y_d es la altitud deseada diferente de cero.

Problema: *Diseñar una estrategia de control que estabilice de manera global uniforme asintótica el sistema (9, 10, 11) con retardos $\tau_2, \tau_1 \geq 0$ en las entradas.*

4. Propuesta de una ley de control para el PVTOL

A continuación se diseña una estrategia de control para estabilizar el modelo simplificado de la plataforma de avión PVTOL empleando los resultados de estabilización asintótica global expuestos en la sección 2.

Etapa 1

Se propone utilizar una ley de control $u_2(t)$ de acuerdo a la estrategia descrita en el Teorema 1 para el caso de sistemas en forma feedforward. Se observa que el doble integrador del subsistema (11) es un caso particular de sistema en forma feedforward por lo

que existe $T > 0$ tal que $\forall t \geq T$,

$$\theta(t) \leq \frac{\pi}{4}. \quad (12)$$

Etapa 2

Sea

$$\hat{\theta}(t - \tau_2) = \theta(t - \tau_2) + \tau_2 \omega(t - \tau_2) - \int_{t - \tau_2}^t (s - t) u_2(s - \tau_2) ds. \quad (13)$$

y observe que

$$\hat{\theta}(t - \tau_2) = \theta(t) \quad (14)$$

por lo que se puede utilizar $\hat{\theta}(t - \tau_2)$ para tener una expresión de la ley de control con retardo. Se propone el cambio de variable de control

$$u_1(t - \tau_1) = \frac{1 + v_1(t - \tau_1)}{\cos(\hat{\sigma}(\hat{\theta}(t - \tau_2)))}. \quad (15)$$

donde $\hat{\sigma}(\cdot)$ es una función de saturación como las definidas en el Teorema 1, con $\bar{M} = \frac{\pi}{4}$ y donde $v_1(t - \tau_1)$ es el nuevo control. Observe que la ley de control (15) esta bien definida puesto que se asume que $\tau_2 \geq \tau_1$ y que la saturación $\hat{\sigma}(\cdot)$ garantiza un denominador no nulo. El subsistema (10) en lazo cerrado con la ley de control (15) es entonces

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \frac{1 + v_1(t - \tau_1)}{\cos(\hat{\sigma}(\hat{\theta}(t - \tau_2)))} \cos \theta(t) - 1 \end{aligned} \right\}$$

y puesto que para $t \geq T$, $\theta(t) \leq \frac{\pi}{4}$, por (14) se tiene que la saturación $\hat{\sigma}(\cdot)$ opera en la zona lineal y el sistema se reduce a

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= v_1(t - \tau_1). \end{aligned} \right\}$$

Este subsistema es un doble integrador, por lo que se puede emplear la estrategia de control para cadenas de integradores propuesta en el Teorema 1:

$$v_1(t - \tau_1) = -\bar{\sigma}_2(y_2(t - \tau_1) + \bar{\sigma}_1(y_2(t - \tau_1) + y_1(t - \tau_1))), \quad (16)$$

donde las funciones de saturación $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ son tales que $\bar{M}_1 = 10$ y $\bar{M}_2 = \frac{10}{8}$ respectivamente. De acuerdo al Teorema 1 el sistema en lazo cerrado es tal que los estado y_1 y y_2 convergen asintóticamente a cero.

Etapa 3

Ahora bien sustituyendo la ley de control (15) en el subsistema (9), (11), se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1 + v_1(t - \tau_1)}{\cos(\hat{\sigma}(\hat{\theta}(t - \tau_2)))} \sin \theta(t) \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= u_2(t - \tau_2) \end{aligned} \right\}$$

y para $t \geq T$, $\theta(t) \leq \frac{\pi}{4}$, por (14) se tiene que la saturación $\hat{\sigma}(\cdot)$ opera en la zona lineal por lo que el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (1 + v_1(t - \tau_1)) \tan \theta(t) \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= u_2(t - \tau_2) \end{aligned}$$

Este subsistema puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta + (\tan \theta - \theta) + v_1(t - \tau_1) \tan \theta(t), \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= u_2(t - \tau_2). \end{aligned}$$

Se observa que el término $(\tan \theta - \theta)$ es tal que

$$\begin{aligned} \tan \theta - \theta &= \int_0^\theta (\sec^2 \varphi - 1) d\varphi \\ &= \int_0^\theta \tan^2 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

por lo que satisface

$$\tan \theta - \theta \leq \int_0^\theta \varphi d\varphi \leq \frac{1}{2} \theta^2$$

para $\theta \in [0, \frac{\pi}{5}]$, por lo que $\tan \theta - \theta$ es C^2 de orden 2 en el origen y se puede identificar con el término $h_2(\theta)$ del Teorema 2. Puesto que $h_1(\cdot) = h_3(\cdot) = 0$ se concluye que la constante M es $\frac{1}{2}$.

Se observa también que para $t \geq T$, $\theta(t) \leq \frac{\pi}{4}$ de manera que $|\tan \theta(t)| < 1$. A su vez la expresión (16), muestra que $v_1(t - \tau_1)$ converge a cero puesto que se estableció que y_1 y y_2 convergen a cero. En consecuencia, el término $v_1(t - \tau_1) \tan \theta(t)$ se puede identificar como una perturbación acotada que se desvanece y el Teorema 2 puede extenderse de manera que se contemplan esta clase de perturbaciones.

Claramente, el sistema pertenece a la clase de sistemas en forma feedforward descrita en el Teorema 2 y se tienen todos los elementos para diseñar el control $u_2(t)$ de acuerdo a la estrategia propuesta en este resultado.

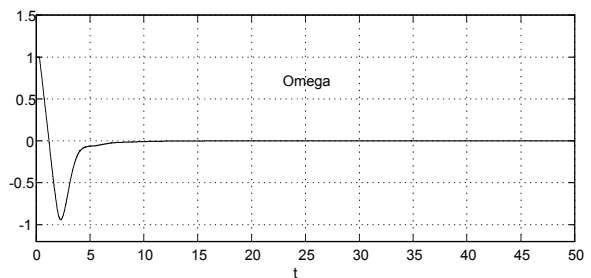
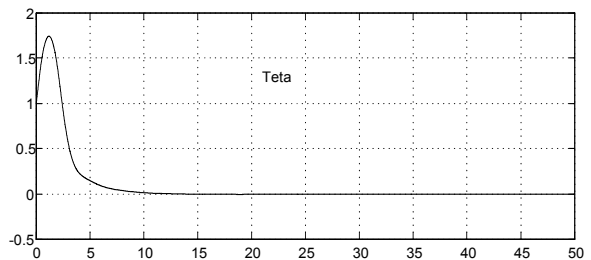
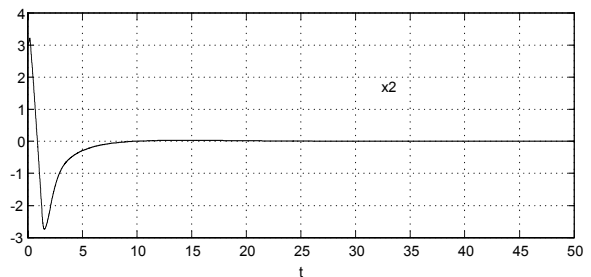
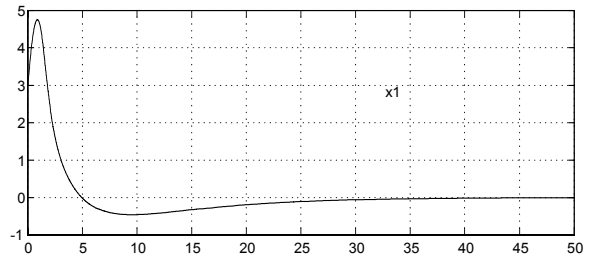
$$\begin{aligned} u_2(t - \tau) &= -\frac{L}{Mk^4} \sigma_4(k^3 \frac{M}{L} \omega(t - \tau_2) \\ &+ \sigma_3(k^3 \frac{M}{L} \omega(t - \tau_2) + k^2 \frac{M}{L} \theta(t - \tau_2) + \\ &\sigma_2(k^3 \frac{M}{L} \omega(t - \tau_2) + 3k^2 \frac{M}{L} \theta(t - \tau_2) + k \frac{M}{L} x_2(t - \tau_2) \\ &+ \sigma_1(k^3 \frac{M}{L} \omega(t - \tau_2) + 3k^2 \frac{M}{L} \theta(t - \tau_2) + \\ &3k \frac{M}{L} x_2(t - \tau_2) + \frac{M}{L} x_1(t - \tau_2))). \end{aligned} \tag{17}$$

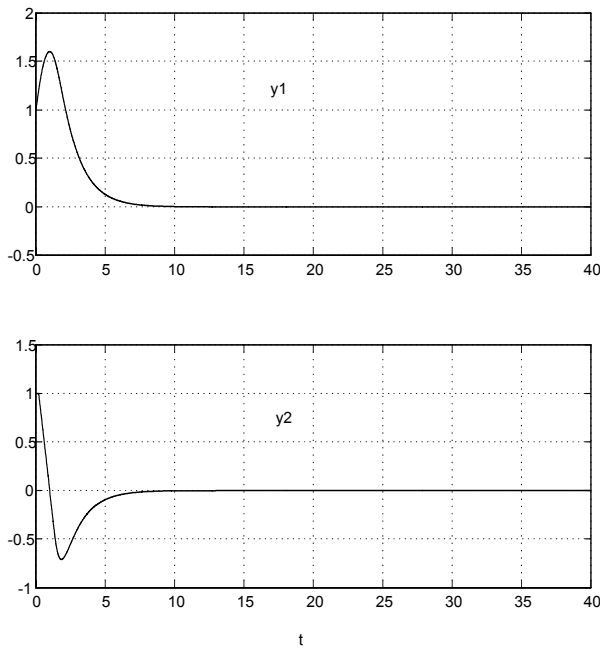
donde $M = \frac{1}{2}$ y $L = 6.45 \times 10^{-10}$, $k = 7.5931 \times 10^{12}$ satisfacen las condiciones suficientes (7), (6) y (8) del Teorema 2. Estos valores de los parámetros M , k y L permiten garantizar la estabilidad asintótica del

sistema en lazo cerrado, pero su interés es únicamente de índole teórica ya que la magnitud de la ley de control (17) obtenida es muy pequeña, provocando un respuesta sumamente lenta.

5. Resultados en simulación

A continuación se muestran los resultados obtenidos en la simulación del PVTOL (9), (10) y (11) retroalimentado con la ley de control (15), (16) y (17). Se utilizaron valores de los parámetros M , k y L distintos de los calculados en la sección anterior, con el fin de estabilizar el sistema en un tiempo razonable. Los parámetros de la ley de control considerados son : $M = 0.5$, $L = 0.45$ y $k = 2$. En la siguiente figura se ilustra la respuesta de los estados del sistema para valores de retardos $\tau_1 = 0.2$ y $\tau_2 = 0.3$.





Observación: Estos resultados se obtuvieron utilizando las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los estados son $[x_{10}, x_{20}, \theta_0, \omega_0, y_{10}, y_{20}] = [3, 3, 1, 1, 1, 1]$.

6. Conclusión

En este trabajo se presentó la estabilización global asintótica de un modelo del avión PVTOL, usando entradas de control que presentan cota y retardo. El análisis se basa en la utilización de resultados previos sobre cadenas de integradores y sistemas feedforward. En un futuro, se extenderá la prueba del Teorema 2 con el fin de incluir perturbaciones acotadas desvanecientes, y la estrategia propuesta será implementada para estabilizar, en tiempo real, un prototipo de avión PVTOL en una altura dada.

Referencias

[1] J. Hauser, S. Sastry, G. Meyer: *Nonlinear Control Design for Slightly Nonminimum Phase Systems: Application to V/STOL Aircraft*. Automatica, 28(4): 665-679, 1992.

[2] F. Lin, W. Zhang, R. D. Brandt: *Robust Hovering Control of a PVTOL Aircraft*: IEEE Trans. on Control Systems Technology, 7(3): 343-351, 1999.

[3] P. Martin, S. Devasia, Brad Paden: *A Different Look at Output Tracking: Control of a VTOL aircraft*. Automatica, 32(1): 101-107, 1996.

[4] F. Mazenc, S. Bowong: *Tracking trajectories of the cart-pendulum system*. Automatica 39 (2003), pp. 677-684.

[5] F. Mazenc, S. Mondié, S. Niculescu: *Global Asymptotic Stabilization for Chains of Integrators with a Delay in the Input*. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 48, No. 1, 2003, pp. 57-63.

[6] F. Mazenc, S. Mondié, S. Niculescu: *Global Stabilization of Oscillators With Bounded Delayed Input*. Proceedings of the 41th IEEE Conference on decision and control, Las Vegas 2002.

[7] F. Mazenc, S. Mondié, R. Francisco: *Global Asymptotic Stabilization of Feedforward System with Delay in the Input*: Submitted to IEEE Trans. Automat. Contr.

[8] W. Michiels, R. Sepulchre, D. Roose: *Stability of Perturbed Delay Differential Equations and Stabilization of Nonlinear Cascade Systems*. SIAM Journal of Control and Optimization 40(3) 2002, pp. 661-680.

[9] R. Sepulchre, M. Janković, P.V. Kokotovic: *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, 1997.

[10] A. R. Teel: *A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation*. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 41, No. 9, 1996, pp. 1256-1270.

[11] A. R. Teel: *Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls*. Systems & Control Letters, Vol. 18, pp. 165-171, 1992.