

Control de Bifurcaciones de Codimensión uno en el plano

Fernando Verduzco G.*

Depto. de Matemáticas. Universidad de Sonora

Horacio Leyva C.

Depto. de Matemáticas. Universidad de Sonora

19 de septiembre de 2003

Resumen

En este trabajo se analiza, para sistemas en el plano, bajo que condiciones es posible controlar las bifurcaciones horquilla, transcítica y Hopf, para sistemas afines en el control y no controlables localmente. En la mayoría de los casos, la caracterización recae sobre la parte lineal del campo vectorial conductor.

Palabras clave: Bifurcación de Hopf, bifurcación horquilla, bifurcación transcítica, controlabilidad.

1. Introducción

En los últimos años ha habido un gran interés en sistemas de control que pueden exhibir fenómenos de bifurcación. Aplicaciones importantes han surgido en sistemas de potencia, lanzamiento de satélites, alteraciones cardíacas, robótica, etc., (ver [3, 5]). El objetivo en el control de bifurcaciones es diseñar un controlador que modifique las características del fenómeno de bifurcación en el sistema de control, como por ejemplo, desplazar arbitrariamente el punto de bifurcación en el espacio de parámetros, modificar la cuenca de atracción, modificar la amplitud de órbitas periódicas, cambiar la dirección de la bifurcación, etc.

Los primeros estudios sobre el control de bifurcaciones fueron reportados en [1, 2], en donde se aborda el control de bifurcaciones de codimensión uno, transcítica y horquilla (caso controlable, en [1]) y Hopf (casos controlable y no controlable, en [2]), ambos en sistemas en \mathbb{R}^n con un control escalar; emplean el método de proyecciones para el cálculo del coeficiente de Lyapunov en la bifurcación de Hopf. En [11] se estudia el caso no controlable de las bifurcaciones transcítica y horquilla con múltiples entradas. Existen numerosos trabajos ([7, 4, 8, 9, 10] que

abordan el problema a través de las formas normales. En todos los trabajos mencionados la constante es analizar sistemas de control generales

$$\dot{x} = f(x, u),$$

y establecer condiciones necesarias para el control de las bifurcaciones transcítica, horquilla y Hopf, en general. Los resultados que reportan dichos documentos generalmente son expresiones bastante complejas de obtener, y difícilmente se relacionan con el campo original.

En este trabajo se inicia la búsqueda, para sistemas en el plano, y afines en el control,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

condiciones para el control de las bifurcaciones mencionadas arriba, que sean sencillas de verificar y que se relacionen con los campos originales $f(x)$ y $g(x)$. El documento está organizado de la siguiente forma: en §2 se presentan algunos resultados conocidos sobre controlabilidad y bifurcaciones, en §3 se hace el planteamiento del problema, en §4 y §5 se establecen los resultados principales sobre el control de las bifurcaciones, terminando en §6 con algunas conclusiones.

2. Resultados Preliminares

En esta sección presentamos algunos resultados conocidos sobre controlabilidad y bifurcaciones, necesarios para el desarrollo de este trabajo.

2.1. Controlabilidad

Considere el sistema de control

$$\dot{z} = F(z) + G(z)u \quad (1)$$

con $z \in \mathbb{R}^n$, u un escalar, $F(0) = 0$ y matriz de controlabilidad $C_1 = (c \quad Ac \quad A^2c \quad \cdots \quad A^{n-1}c)$, donde $A = DF(0)$

*Dirigir correspondencia a: UNISON, Av. Rosales y Transversal, s/n. Hermosillo, Sonora. Tel. (662)259-2155, Fax: (662)259-2219. Correo-e: verduzco@gauss.mat.uson.mx

y $c = G(0)$. Sea $z = Px$, con $\det(P) \neq 0$, un cambio de coordenadas tal que (1) se transforma en

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2)$$

con $f(x) = Jx + \dots$, $g(x) = b + \dots$, donde $AP = PJ$, $b = P^{-1}c$ y $C_2 = (b \ Jb \ J^2b \ \dots \ J^{n-1}b)$ es la matriz de controlabilidad. Sea $rg(\cdot)$ el rango de una matriz.

Teorema 1

$$rg(C_1) = rg(C_2)$$

Este resultado nos permitirá iniciar nuestro análisis con sistemas de la forma (2), donde la matriz J está en forma de Jordan.

2.2. Bifurcaciones

La teoría de bifurcaciones estudia los cambios en el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos ante la variación de parámetros. Clasificaremos las bifurcaciones en estacionarias (estáticas) y dinámicas. Las primeras tienen que ver con cambios en la estructura de los puntos de equilibrio, mientras que las segundas con cambios en los ciclos límite. Las bifurcaciones estacionarias que analizaremos serán la transcritical (ver figura 1) y horquilla (ver figura 2), y la bifurcación dinámica llamada bifurcación de Hopf (ver figura 3).

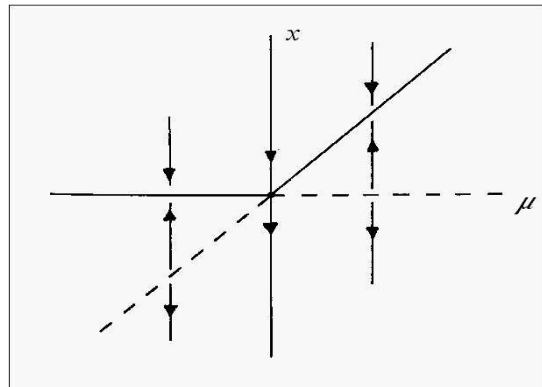


Figura 1: Bifurcación transcritical.

El siguiente teorema, probado por Sotomayor [13], establece condiciones necesarias para la ocurrencia de las bifurcaciones transcritical y horquilla.

Teorema 2 (Sotomayor) Considere la familia uniparamétrica de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x, \mu) \quad (3)$$

con $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lo suficientemente suave. Supongamos que $\mathcal{F}(x_0, \mu_0) = 0$ y que $A = D_x \mathcal{F}(x_0, \mu_0)$ posee un

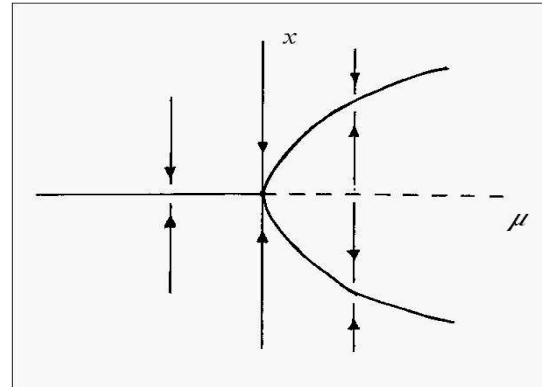


Figura 2: Bifurcación horquilla supercrítica.

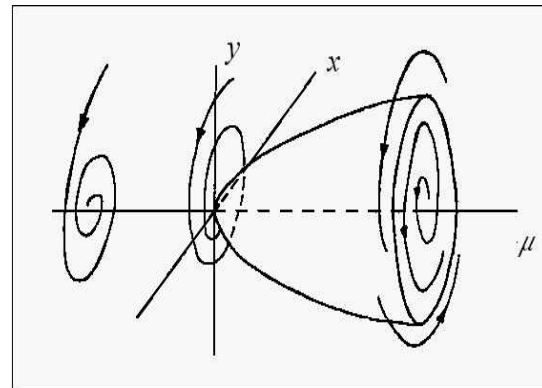


Figura 3: Bifurcación de Hopf supercrítica.

único valor propio cero, con vector propio por la derecha v y por la izquierda w .

(i) Si

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= w^T D_\mu \mathcal{F}(x_0, \mu_0) &&= 0, \\ \mathcal{K}_2 &= w^T D_{x\mu}^2 \mathcal{F}(x_0, \mu_0)(v) &&\neq 0, \\ \mathcal{K}_3 &= w^T D_{xx}^2 \mathcal{F}(x_0, \mu_0)(v, v) &&\neq 0, \end{aligned}$$

entonces el sistema (4) sufre una bifurcación transcritical en el punto de equilibrio x_0 cuando el parámetro μ varía a través del valor de bifurcación $\mu = \mu_0$, es decir, existe un nuevo punto de equilibrio, distinto de x_0 , para valores del parámetro muy cercanos, tanto mayores como menores, a μ_0 . Ver figura 1.

(ii) Si

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= w^T D_\mu \mathcal{F}(x_0, \mu_0) &&= 0, \\ \mathcal{K}_2 &= w^T D_{x\mu}^2 \mathcal{F}(x_0, \mu_0)(v) &&\neq 0, \\ \mathcal{K}_3 &= w^T D_{xx}^2 \mathcal{F}(x_0, \mu_0)(v, v) &&= 0, \\ \mathcal{K}_4 &= w^T D_{xxx}^3 \mathcal{F}(x_0, \mu_0)(v, v, v) &&\neq 0 \end{aligned}$$

entonces el sistema (4) sufre una bifurcación horquilla en el punto de equilibrio x_0 cuando el parámetro μ varía a través del valor de bifurcación $\mu = \mu_0$, es decir, existe dos nuevos puntos de equilibrio, distintos de x_0 , para valores del parámetro muy cercanos, ya sea mayores ó menores, a μ_0 . Ver figura 2.

Observación 1 *La primer expresión diferente de cero en (ii) del teorema 2, está relacionada con la dirección de la bifurcación horquilla, es decir, si al pasar el parámetro por μ_0 , de izquierda a derecha, el punto de equilibrio x_0 pierde estabilidad (caso supercrítico) o la gana (caso subcrítico).*

El siguiente teorema, probado por Hopf [12],[6], establece condiciones necesarias para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf.

Teorema 3 (Hopf) *Considere la familia uni-paramétrica de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x, \mu) \quad (4)$$

con $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lo suficientemente suave. Sean (x_0, μ_0) un punto de equilibrio y $A(\mu) = D_x \mathcal{F}(x_0, \mu)$.

(i) Si $A(\mu_0)$ posee un único par de valores propios con parte real cero, entonces existe una curva suave de puntos de equilibrio $(x(\mu), \mu)$ con $x(\mu_0) = x_0$. Además, los valores propios $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ de $A(\mu)$, los cuales se hacen imaginarios en μ_0 , varían suavemente con el parámetro μ .

(ii) Si $\frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$, entonces existe una única variedad central tridimensional, pasando por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave, cuya expansión en serie de Taylor, hasta grado tres sobre la variedad central, está dado, en forma polar, por la siguiente expresión

$$\dot{r} = (d\mu + ar^2)r, \quad \dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2.$$

Si $a \neq 0$ entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenespacio generado por $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$. Si $a < 0$ las órbitas periódicas son estables (caso supercrítico) mientras que si $a > 0$ son inestables (caso subcrítico). Ver figura 3.

El cálculo del coeficiente a en el teorema anterior, para sistemas en general, es bastante complejo. Existe una fórmula para el caso particular de sistemas en el plano. Considere el sistema $\dot{x} = Jx + F(x)$, donde $x = (x_1, x_2)^T$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ y $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$, con $F_1(0) = F_2(0) = 0$ y $DF_1(0) = DF_2(0) = 0$, entonces $a = \frac{1}{16\omega}(\omega R_1 + R_2)$, donde $R_1 = F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2}$ y $R_2 = F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2}$.

3. Planteamiento del Problema

Considere el sistema de control

$$\dot{z} = F(z) + G(z)u \quad (5)$$

con $z \in \mathbb{R}^2$, u escalar y $F(0) = 0$. Hagamos el cambio de coordenadas $x = P^{-1}z$ tal que (5) se transforma en

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6)$$

Supongamos que el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$, alrededor del origen, está dado por $f(x) = Jx + f_2(x) + f_3(x) + \dots$, donde J está en forma de Jordan y $f_j(x)$ son los términos de grado j de $f(x)$, e igualmente, $g(x) = b + Mx + g_2(x) + g_3(x) + \dots$.

Deseamos diseñar una ley de control $u = u(x, \mu)$, con μ un parámetro real, tal que, en los casos en que la matriz J posea un valor propio cero o un par de valores propios imaginarios, logremos provocar y controlar las bifurcaciones horquilla y transcítica en el primer caso, y la bifurcación de Hopf en el segundo caso. En ambos casos supondremos que el sistema de control (6) no es localmente controlable, es decir, supondremos que la matriz de controlabilidad en el primer caso tiene rango uno, mientras que en el segundo caso supondremos que el rango es cero.

Proponemos la siguiente ley de control

$$u(x, \mu) = \beta_1\mu + (L_0 + \mu L_1)x + \frac{1}{2}(Q_0)(x, x) + \frac{1}{6}(C_0)(x, x, x) \quad (7)$$

donde $\beta_1 \in \mathbb{R}$, $L_0, L_1 \in \mathbb{R}^2$, $Q_0(x, x)$ es una forma cuadrática escalar, con $Q_0 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ simétrica, y $C_0(x, x, x)$ es una forma cúbica escalar, donde $C_0 = (C_{01} \ C_{02})$, con $C_{0j} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ simétricas. Sustituyendo en (6) obtenemos, después de algunos cálculos, el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{F}(x, \mu) \\ &= b_\mu + J_\mu x + \frac{1}{2}\mathcal{Q}(\mu)(x, x) + \frac{1}{6}\mathcal{C}(\mu)(x, x, x) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} b_\mu &= \beta_1\mu b \\ J_\mu &= (J + bL_0) + \mu(bL_1 + \beta_1 M) \\ \mathcal{Q}(\mu) &= (D^2 f(0) + 2\mathcal{L}_0 + \mathcal{B}_0) + \mu(\beta_1 D^2 g(0) + 2\mathcal{L}_1) \\ \mathcal{C}(\mu) &= (D^3 f(0) + 3\mathcal{G}_0 + 3\mathcal{M}_0 + \mathcal{N}_0) \\ &\quad + \mu(\beta_1 D^3 g(0) + 3\mathcal{G}_1) \end{aligned} \quad (9)$$

con $\mathcal{L}_i = \begin{pmatrix} L_i^t M_1 \\ L_i^t M_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{G}_i = \begin{pmatrix} L_i G_{21} \\ L_i G_{22} \end{pmatrix}$, para $i = 0, 1$, $\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} b_1 Q_0 \\ b_2 Q_0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} M_1 Q_0 \\ M_2 Q_0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{N}_0 = \begin{pmatrix} b_1 C_{01} & b_1 C_{02} \\ b_2 C_{01} & b_2 C_{02} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$ y $D^2 g(0) = \begin{pmatrix} G_{21} \\ G_{22} \end{pmatrix}$.

En las siguientes secciones probaremos que, si el sistema de control (6) no es localmente controlable alrededor del

origen, y la matriz J tiene un valor propio cero o un par de valores propios imaginarios, entonces es posible diseñar una ley de control (7) tal que el sistema bifurque y se pueda tener control de la bifurcación. Veremos que la matriz M juega un papel muy importante en ambos casos, ya que el diseño del control dependerá si $\det(M) \neq 0$ en el primer caso y si $\text{tr}(M) \neq 0$ en el segundo.

Observación 2 Es importante mencionar que la matriz M no es la matriz del sistema original (5); sin embargo, es semejante a la matriz del sistema original. Como la semejanza de matrices deja invariantes la traza y el determinante, los resultados que obtengamos para el sistema de control (6), serán igualmente válidos para el sistema de control original.

4. Bifurcaciones estacionarias

Consideremos de nuevo el sistema de control (6)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

donde $f(x) = Jx + f_2(x) + \dots$, $g(x) = b + Mx + g_2(x) + \dots$ y $C = (b \ Jb)$ es la matriz de controlabilidad. En esta sección supondremos que J posee un valor propio cero y que el sistema no es localmente controlable, es decir:

$$(H1) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \lambda_0 \neq 0$$

$$(H2) \quad \text{rg}(C) = 1$$

La hipótesis (H2) equivale a que $\det(C) = 0$ y $C \neq 0$, por lo tanto, $\det(C) = \lambda_0 b_1 b_2 = 0$. Esto nos conduce a analizar dos posibles casos: $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Recuérdese que $C \neq 0$, por lo tanto $b \neq 0$.

Caso $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Consideremos la ley de control $u(x, \mu) = \mu L_1 x + \frac{1}{2} Q_0(x, x) + \frac{1}{6} C_0(x, x, x)$, con $L_1 = (\beta_1, 0)$, $Q_0 = \begin{pmatrix} 2\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C_0 = (C_{01} \ C_{02}) = \left(\begin{pmatrix} 6\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Luego, siguiendo (8)-(9), el sistema (6) en lazo cerrado está dado por $\dot{x} = \mathcal{F}(x, \mu) = J_\mu x + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(\mu)(x, x) + \frac{1}{6} \mathcal{C}(\mu)(x, x, x) + \dots$, con

$$\begin{aligned} J_\mu &= J + \mu b L_1 \\ \mathcal{Q}(\mu) &= D^2 f(0) + \mathcal{B}_0 + 2\mu \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{C}(\mu) &= D^3 f(0) + 3\mathcal{M}_0 + \mathcal{N}_0 + 3\mu \mathcal{G}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donde} \quad D^2 f(0) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\ D^3 f(0) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 6d_{11} & - \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{y} \\ M &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ - & - \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando el teorema 2 estableceremos condiciones sobre β_1 , β_2 y β_3 , para que el sistema (6) sufra en el origen las bifurcaciones transcítica y horquilla. Obsérvese que $\mathcal{F}(0, 0) = 0$ y $D_x \mathcal{F}(0, 0) = J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, con vectores propios $w^T = (1, 0)$ y $v^T = (1, 0)$. Luego entonces, $\mathcal{K}_1 = 0$, $\mathcal{K}_2 = b_1 \beta_1$, $\mathcal{K}_3 = 2(a_{11} + b_1 \beta_2)$ y $\mathcal{K}_4 = 6(d_{11} + m_{11} \beta_2 + b_1 \beta_3)$. Hemos probado entonces el siguiente teorema

Teorema 4 Considere el sistema de control (6)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

el cual satisface las hipótesis (H1)–(H2), con $b = (b_1, 0)$. Proponemos la ley de control

$$u(x, \mu) = \mu \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_1^3, \quad (10)$$

luego,

(i) si $\beta_1 \neq 0$ y $\beta_2 \neq -\frac{a_{11}}{b_1}$ entonces el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación transcítica,

(ii) si $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = -\frac{a_{11}}{b_1}$ y $\beta_3 \neq \frac{a_{11} m_{11} - b_1 d_{11}}{b_1^2}$ entonces el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación horquilla.

Falta analizar si es posible controlar la bifurcación horquilla. Sea $\lambda(\mu)$ el valor propio de J_μ que atraviesa el eje vertical por el origen cuando $\mu = 0$, luego

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(\mu)|_{\mu=0} = \frac{\mathcal{K}_2}{\text{tr}(J_0)} = \frac{b_1 \beta_1}{\lambda_0}.$$

Por lo tanto, si $b_1 \beta_1 > 0$ la bifurcación es supercrítica, en caso contrario es subcrítica.

Caso $b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$. En este caso, a diferencia del caso anterior, en el cual no hubo ninguna restricción sobre los campos f y g , serán necesarias algunas restricciones bastante tediosas de verificar. Consideremos la ley de control $u(x, \mu) = \beta_1 \mu + L_0 x + \frac{1}{2} Q_0(x, x)$, con $L_0 = (\beta_2, 0)$, $Q_0 = \begin{pmatrix} 2\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, siguiendo (8)-(9), el sistema (6) en lazo cerrado está dado por $\dot{x} = \mathcal{F}(x, \mu) = b_\mu + J_\mu x + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(\mu)(x, x) + \frac{1}{6} \mathcal{C}(\mu)(x, x, x) + \dots$,

con

$$\begin{aligned} b_\mu &= \beta_1 \mu b \\ J_\mu &= J + bL_0 + \beta_1 \mu M \\ \mathcal{Q}(\mu) &= D^2 f(0) + 2\mathcal{L}_0 + \mathcal{B}_0 + \beta_1 \mu D^2 g(0) \\ \mathcal{C}(\mu) &= D^3 f(0) + 3\mathcal{G}_0 + 3\mathcal{M}_0 + \beta_1 \mu D^3 g(0), \end{aligned}$$

De nuevo, la idea es usar el teorema 2 para establecer condiciones sobre β_1 , β_2 y β_3 , para que el sistema (6) sufra en el origen las bifurcaciones transcritical y horquilla. Obsérvese que $\mathcal{F}(0,0) = 0$ y $D_x \mathcal{F}(0,0) = J_0 = J + bL_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 \beta_2 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, con vectores propios $w^T = (1, 0)$ y $v^T = (v_1, v_2)$, con $v_1 = \lambda_0$ y $v_2 = -b_2 \beta_2$. Luego, después de algunos cálculos obtenemos $\mathcal{K}_1 = 0$, $\mathcal{K}_2 = \beta_1 [m_{11} \lambda_0 - b_2 m_{12} \beta_2]$, $\mathcal{K}_3 = 2b_2 k_1 \beta_2^2 - 2\lambda_0 k_2 \beta_2 + 2a_{11} \lambda_0^2$ y $\mathcal{K}_4 = 6\lambda_0^2 \mathcal{K}_2 \beta_3 + \gamma_0$, donde $k_1 = a_{22} b_2 - \lambda_0 m_{12}$, $k_2 = a_{12} b_2 - \lambda_0 m_{11}$ y $\gamma_0 = \gamma_0(\beta_2)$.

Para garantizar la existencia de las bifurcaciones transcritical y horquilla, debemos probar, en primer lugar, que existen β_1 y β_2 tales que $\mathcal{K}_2 \neq 0$. El siguiente lema nos da condiciones necesarias para que tal hecho ocurra.

Lema 1 Sea $\beta_1 \neq 0$ fijo, luego si $\det(M) \neq 0$ entonces existe β_2 tal que $\mathcal{K}_2 \neq 0$.

Demostración:

Hagámoslo por contradicción. Supongamos que para toda β_2 , $\mathcal{K}_2 = 0$, es decir,

$$\beta_1 [m_{11} \lambda_0 - b_2 m_{12} \beta_2] = 0$$

para toda β_2 , pero esto implica que $m_{11} = m_{12} = 0$, lo cual es una contradicción. •

Obsérvese que si β_1 y β_2 son tales que $\mathcal{K}_2 \neq 0$, entonces existe β_3 tal que $\mathcal{K}_4 \neq 0$, por lo tanto, basta analizar \mathcal{K}_2 y \mathcal{K}_3 . Si fijamos $\beta_1 \neq 0$, podemos considerar \mathcal{K}_2 y \mathcal{K}_3 como funciones de β_2 , siendo \mathcal{K}_2 una recta y \mathcal{K}_3 una parábola (si $k_1 \neq 0$) o una recta (si $k_1 = 0$).

Supongamos que $k_1 \neq 0$. Sea $r_0 = \frac{m_{11} \lambda_0}{b_2 m_{12}}$ el cruce de la recta \mathcal{K}_2 con el eje horizontal, cuando $m_{12} \neq 0$. Si $m_{12} = 0$, la recta es horizontal. Sea $D = 4\lambda_0^2 k_0$, con $k_0 = k_2^2 - 4a_{11} b_2 k_1$, el discriminante de la parábola \mathcal{K}_3 . Luego, si $k_0 > 0$, existen dos cruces $r_{1,2}$ de la parábola con el eje horizontal. Si tomamos β_2 tal que $\beta_2 \notin \{r_0, r_1, r_2\}$ entonces $\mathcal{K}_2 \neq 0$ y $\mathcal{K}_3 \neq 0$, por lo tanto el sistema sufre la bifurcación transcritical. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $r_1 \neq r_0$, luego, si hacemos $\beta_2 = r_1$, entonces $\mathcal{K}_2 \neq 0$ y $\mathcal{K}_3 = 0$, provocando esto la bifurcación horquilla. Ahora bien, si $k_0 = 0$, la parábola \mathcal{K}_3 tiene su vértice V_0 sobre el eje horizontal. Si $V_0 = r_0$ sólo es posible provocar la bifurcación transcritical, en caso contrario, se pueden provocar ambas. Finalmente, si $k_0 < 0$, sólo es posible provocar la bifurcación transcritical.

Supongamos ahora que $k_1 = 0$, luego, \mathcal{K}_2 y \mathcal{K}_3 son rectas. Si ambas cruzan el eje horizontal en el mismo punto, sólo provocaremos la bifurcación transcritical, mientras que si lo hacen en puntos diferentes, podremos provocar ambas bifurcaciones. Tenemos entonces probado el siguiente teorema,

Teorema 5 Considere el sistema de control (6)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

el cual satisface las hipótesis (H1) – (H2), con $b = (0, b_2)$ y $\det(M) \neq 0$. Proponemos la ley de control

$$u(x, \mu) = \beta_1 \mu + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_1^2, \quad (11)$$

sean $k_1 = a_{22} b_2 - \lambda_0 m_{12}$, $k_2 = a_{12} b_2 - \lambda_0 m_{11}$ y $k_0 = k_2^2 - 4a_{11} b_2 k_1$. Entonces

- (i) existen $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tales que el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación transcritical,
- (ii) si $k_1 \neq 0$ y $k_0 > 0$, existen $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tales que el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación horquilla,
- (iii) si $k_1 \neq 0$, $k_0 = 0$ y $2m_{11} k_1 - m_{12} k_2 \neq 0$, existen $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tales que el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación horquilla.
- (iv) si $k_1 = 0$ y $m_{11} k_2 - m_{12} a_{11} b_2 \neq 0$, existen $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tales que el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación horquilla.

Por último, analicemos el control de la bifurcación horquilla. Sea $\lambda(\mu)$ el valor propio de J_μ que atraviesa el eje vertical por el origen cuando $\mu = 0$, luego

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(\mu)|_{\mu=0} = \frac{\mathcal{K}_2}{\text{tr}(J_0)} = \frac{\beta_1 [m_{11} \lambda_0 - b_2 m_{12} \beta_2]}{\lambda_0}.$$

Recuérdese que β_2 se elige de tal forma que $\mathcal{K}_2 \neq 0$ y $\mathcal{K}_3 = 0$, mientras que β_3 se elige para que $\mathcal{K}_4 \neq 0$, luego entonces estamos en libertad de elegir β_1 para controlar la dirección de la bifurcación horquilla.

5. Bifurcación de Hopf

Consideremos de nuevo el sistema de control (6)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

donde $f(x) = Jx + f_2(x) + \dots$, $g(x) = b + Mx + g_2(x) + \dots$ y $\mathcal{C} = (b \ Jb)$ es la matriz de controlabilidad. En esta sección supondremos que los valores propios de J tienen parte real cero y que el sistema no es localmente controlable, es decir:

$$(H3) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0 > 0$$

$$(H4) \quad rg(\mathcal{C}) = 0$$

La hipótesis (H4) equivale a que $\mathcal{C} = 0$, por lo tanto $b = 0$. Consideremos la ley de control $u(x, \mu) = \beta_1 \mu + \frac{1}{2} Q_0(x, x)$, con $Q_0 = \begin{pmatrix} 2\beta_2 & 0 \\ 0 & 2\beta_2 \end{pmatrix}$. Luego, siguiendo (8)-(9), el sistema (6) en lazo cerrado está dado por $\dot{x} = \mathcal{F}(x, \mu) = J_\mu x + \frac{1}{2} \mathcal{Q}(\mu)(x, x) + \frac{1}{6} \mathcal{C}(\mu)(x, x, x) + \dots$, con

$$\begin{aligned} J_\mu &= J + \beta_1 \mu M \\ \mathcal{Q}(\mu) &= D^2 f(0) + \mathcal{B}_0 + \beta_1 \mu D^2 g(0) \\ \mathcal{C}(\mu) &= D^3 f(0) + 3\mathcal{M}_0 + \beta_1 \mu D^3 g(0), \end{aligned}$$

Utilizaremos el teorema 3 para establecer condiciones sobre β_1 y β_2 para que el sistema (6) sufra en el origen la bifurcación de Hopf. Obsérvese que $\mathcal{F}(0, 0) = 0$ y $D_x \mathcal{F}(0, 0) = J$. Sean $\lambda(\mu)$ y $\bar{\lambda}(\mu)$ los valores propios de J_μ que atraviezan el eje horizontal en $\mu = 0$, luego

$$\frac{d}{d\mu} (Re(\lambda(\mu)))|_{\mu=0} = \frac{\beta_1 tr(M)}{2},$$

por lo tanto, el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación de Hopf si $tr(M) \neq 0$. Por último, para determinar la dirección de la bifurcación, se calcula el coeficiente a , obteniendo

$$a = \gamma_0 + \frac{3}{4} tr(M) \beta_2,$$

donde γ_0 es una constante que depende de los campos f y g . Hemos probado entonces el siguiente teorema,

Teorema 6 *Considere el sistema de control (6)*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

el cual satisface las hipótesis (H3) – (H4), con $b = 0$ y $tr(M) \neq 0$. Proponemos la ley de control

$$u(x, \mu) = \beta_1 \mu + \beta_2 (x_1^2 + x_2^2), \quad (12)$$

entonces existen valores de β_1 y β_2 tales que es posible el control de la bifurcación de Hopf en el sistema en lazo cerrado.

6. Conclusiones

Hemos iniciado el estudio de controlar bifurcaciones de codimensión uno en sistemas afines en el control, bidimensionales. Hemos encontrado condiciones sencillas de verificar, como el cálculo de la traza y el determinante de una matriz. La idea es, en futuros trabajos, generalizar estos resultados a sistemas n-dimensionales.

Referencias

- [1] E.H. Abed, J.H. Fu. “Local feedback stabilization and bifurcation control, I. Hopf bifurcation”. *Systems & Control Letters*, 7(1986). 11-17.
- [2] E.H. Abed, J.H. Fu. “Local feedback stabilization and bifurcation control, II. Stationary bifurcation”. *Systems & Control Letters*, 8(1987). 467-473.
- [3] E.H. Abed, H.O. Wang, A. Tesi. “Control of bifurcation and chaos”, in *The Control Handbook*, W.S. Levine, Ed. Boca Raton, FL. CRC Press, 1995. 951-966.
- [4] D.E. Chang, W. Kang, A.J. Krener. “Normal forms and bifurcations of control systems”. *Proc. 39th IEEE CDC*. Sydney, Australia. 2000.
- [5] G. Chen, J.L. Moliola, H.O. Wang. “Bifurcation control: theories, methods, and applications”, *Int. J. Bif. Chaos*, vol. 10, No. 3, 511-548. 2000.
- [6] J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag. 1993.
- [7] B. Hamzi, W. Kang, J.P. Barbot. “On the control of Hopf bifurcations”. *Proc. 39th IEEE CDC*. Sydney, Australia. 2000.
- [8] W. Kang. “Bifurcation and normal form of nonlinear control systems, Part I”. *SIAM J Control and Optimization*, 36-1. 193-212. 1988.
- [9] W. Kang. “Bifurcation and normal form of nonlinear control systems, Part II”. *SIAM J Control and Optimization*, 36-1. 213-232. 1988.
- [10] W. Kang. “Invariants and stability of control systems with transcritical and saddle-node bifurcations”. *Proc. 36th IEEE CDC*. San Diego, California, USA. 1997.
- [11] T. Kim, E.H. Abed. “Stationary bifurcation control of systems with uncontrollable linearization”. *Int. J. Control*, vol. 74, No. 5, 445-452. 2001.
- [12] J.E. Marsden, M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag. 1976.
- [13] J. Sotomayor. “Generic bifurcation of dynamical systems. En *Dynamical Systems*. M.M. Peixoto, Ed. 549-560. Academic Press. 1973.