

Mapas escalares de un convertidor elevador en modo corriente

Sergio C. Yáñez-Campos^(*), Ricardo Femat^(**) y Jesús Leyva-Ramos^(**).

^(*) *Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Av. Dr. Manuel Nava No. 8, San Luis Potosí, S. L. P. 78290, MEXICO. scyanez@ipicyt.edu.mx*

^(**) *Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Camino a la presa de San José 2055, San Luis Potosí, S. L. P. MEXICO. rfemat@ipicyt.edu.mx, jleyva@ipicyt.edu.mx*

Resumen. En esta contribución se analiza una clase de mapa escalar obtenido a partir de las formas de onda del convertidor elevador controlado en modo corriente pico sin rampa estabilizadora. Se establecen condiciones necesarias y suficientes para caracterizar el comportamiento estable y periódico del ciclo de trabajo. Las propiedades geométricas de los mapas escalares son ilustradas con mapas iterativos.

1 INTRODUCCIÓN.

Debido a la importancia que tiene el convertidor elevador se han desarrollado diferentes esquemas de control: 1) control en modo voltaje y 2) control en modo corriente (Kassakian, et al., 1991; Middlebrook, 1989; Verghese, et al., 1989; Mohan, et al. 1989). La implementación de estos esquemas de control ha permitido la regulación del voltaje de salida. Sin embargo, diferentes investigaciones han reportado diversos fenómenos alineales como son: periodicidad, oscilaciones cuasiperiódicas y caos (Banerjee, et al., 2000; Lu y Tse, 2001; di Bernardo y Vasca, 2000; Tse, et al., 2000). También se ha reportado que la ganancia de retroalimentación (Chan y Tse, 1997) y otros parámetros del circuito (Banerjee y Chakrabarty, 1998; Deane y Hamill, 1990) pueden ser usados como parámetros de bifurcación entre estos comportamientos (di Bernardo y Vasca, 2000).

Adicionalmente, se ha publicado que un mapa escalar de la forma $x_{k+1} = f(x_k)$ asigna el estado anterior en el estado actual y permite una representación clara del comportamiento dinámico de convertidores (Seddley, 2002) y muchos otros sistemas físicos (Arrowsmith, et al. 1994; Strogatz, 1994; Wiggins, 1990). Hamill, et al., (1992) y Deane (1992) reportan el modelo de un mapa iterativo para convertidores obtenido a partir de las ecuaciones

diferenciales ordinarias del convertidor para los estados del sistema. Estos mapas iterativos han sido obtenidos a partir de una aproximación discreta en el tiempo de la solución del modelo de espacio de estados y pueden llevar a obtener mapas con dimensión mayor que uno y pueden ser muy complejos para su análisis. El propósito de este trabajo consiste en obtener un mapa escalar a partir de las formas de onda del convertidor elevador controlado en modo corriente pico. Es decir, nuestro interés es simplificar el procedimiento de modelado del comportamiento dinámico de los convertidores cd-cd y proporcionar criterios de estabilidad y existencia de ciclos límite. La organización del texto es como sigue. La descripción del convertidor elevador controlado bajo el esquema de control en modo corriente pico y el mapa escalar obtenido a partir de la geometría de las formas de onda son discutidos en la Sección 2. En la Sección 3, las propiedades geométricas del mapa escalar son estudiadas analíticamente en el dominio del ciclo de trabajo y se presentan relaciones que determinan la ubicación del punto fijo, además se establecen criterios de estabilidad, periodicidad e inestabilidad. En la Sección 4 se muestran ejemplos ilustrativos donde la trayectoria del mapa iterativo presenta diferentes tipos de comportamiento.

2 CONVERTIDOR ELEVADOR EN MODO CORRIENTE.

El convertidor elevador está formado por un diodo, un elemento de conmutación (interruptor), un inductor y una resistencia de carga en paralelo con un capacitor. La Figura 1 muestra el diagrama esquemático del convertidor elevador controlado en modo corriente. Bajo el esquema de control en modo corriente, el interruptor es encendido cada T_s segundos a una frecuencia fija. Durante el intervalo de tiempo en el cual el interruptor

está cerrado la corriente del inductor i_L se incrementa en forma lineal. Cuando la corriente pico del inductor es igual a la señal de control el interruptor se abre y la corriente del inductor se reduce hasta que el interruptor es cerrado nuevamente.

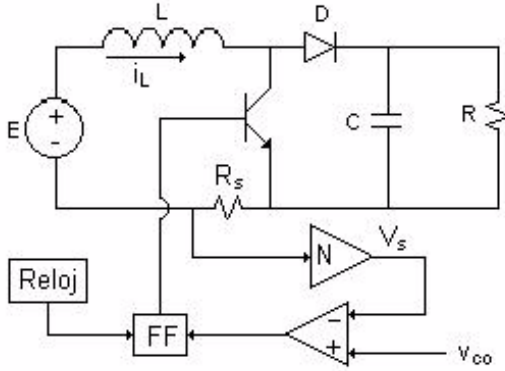


Figura 1.-Convertidor elevador controlado en modo corriente sin rampa estabilizadora

De esta forma, el convertidor adopta dos topologías: 1) cuando el interruptor está cerrado y 2) cuando el interruptor está abierto. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento dinámico del convertidor en sus diferentes topologías son: para el interruptor cerrado

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{E}{L} \quad (1)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{v_c}{RC}$$

para el interruptor abierto

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{E - v_c}{L} \quad (2)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{v_c}{CR}$$

donde E es el voltaje de alimentación y v_c es el voltaje en el capacitor.

Por otro lado, las formas de onda que describen el comportamiento de la corriente del inductor y la relación que existe con el ciclo de trabajo se muestran en la Figura 2. El tiempo de encendido y apagado del interruptor se determina por el ciclo de trabajo. En el intervalo de tiempo $nT_s \leq t_k < (n + d_k)T_s$ el interruptor es encendido y es apagado durante el intervalo de tiempo $(n + d_k)T_s \leq t_k < (n + 1)T_s$. Geométricamente la distancia del voltaje de control a la corriente del inductor sensada al inicio del ciclo $k + 1$ es igual a la sensada al final del ciclo k . Esta relación puede ser expresada por $V_{s1} = v_{co} - M_1 d_1 T_s N R_s$. Reacomodando se obtiene la siguiente ecuación para el ciclo de trabajo d_{k+1}

$$d_{k+1} = \frac{v_{co} - V_{s1}}{M_1 T_s N R_s} \quad (3)$$

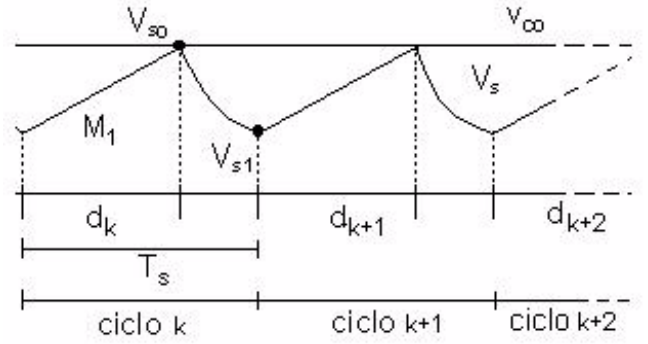


Figura 2.- Formas de onda del convertidor elevador sin rampa estabilizadora

donde V_{s1} y V_{s0} son los voltajes obtenidos al sensar la corriente del inductor al final del ciclo k y en $d_k T_s$ respectivamente, $M_1 = E/L$ es la pendiente de la corriente del inductor sensada durante el tiempo de encendido del interruptor, d_k y d_{k+1} son el ciclo de trabajo en el ciclo k y ciclo $k + 1$, respectivamente y T_s es el periodo de conmutación del interruptor. Nuestro interés es construir un mapa iterativo que relacione el ciclo de trabajo d_{k+1} con el ciclo de trabajo d_k . Como veremos enseguida, éste puede realizarse a partir de la ec. (3) donde está involucrada la corriente del inductor sensada al final del k -ésimo ciclo (V_{s1}) que está dada por la siguiente expresión:

$$V_{s1} = i_L(t_k) N R_s \quad (4)$$

donde $(n + d_k)T_s \leq t_k < (n + 1)T_s$.

Ahora bien, el sistema (2) gobierna el convertidor en el intervalo de tiempo cuando el interruptor está abierto de donde se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{E}{R} \quad (5)$$

Para la cual, haciendo $t_k = (1 - d_k)T_s$, obtenemos la siguiente solución

$$i_L(t_k)|_{t_k=(1-d_k)T_s} = \left(\frac{v_{co}}{N R_s} - \frac{E}{R} \right) e^{-\alpha((1-d_k)T_s)} + \frac{E}{R} \quad (6)$$

donde $\alpha = 1/2RC$; que al ser sustituida en (4), se obtiene

$$V_{s1} = \left(\left(\frac{v_{co}}{N R_s} - \frac{E}{R} \right) e^{-\alpha((1-d_k)T_s)} + \frac{E}{R} \right) N R_s \quad (7)$$

Así se tiene la expresión para el k -ésimo ciclo de trabajo

$$d_{k+1} = \frac{v_{co} R - E N R_s}{R M_1 T_s N R_s} \left(1 - e^{-\alpha(1-d_k)T_s} \right) \quad (8)$$

El término $e^{-\alpha(1-d_k)T_s}$ puede ser aproximado al m -ésimo orden por medio de una expansión en series de

Taylor como sigue:

$$e^{-\alpha(1-d_k)T_s} \approx \sum_{i=0}^m \frac{[-\alpha(1-d_k)T_s]^i}{i!} + O(\cdot) \quad (9)$$

donde $O(\cdot)$ denota los términos de orden superior a m . Tomando los términos lineales de la aproximación ($m = 1$) y sustituyendo en (8) obtenemos la expresión que relaciona el ciclo de trabajo d_{k+1} con d_k :

$$d_{k+1} = \alpha(1-d_k) \left(\frac{v_{c0}R - ENR_s}{RM_1NR_s} \right) \quad (10)$$

que tiene la forma general

$$x_{k+1} = a(1-x_k) \quad (11)$$

donde $a = \left(\alpha \frac{v_{c0}R - ENR_s}{RM_1NR_s} \right)$. Esta ecuación presenta un medio muy conveniente de analizar el comportamiento dinámico del ciclo de trabajo. Si bien, la ecuación (11) es lineal, la iteración de esta expresión puede presentar diferentes comportamientos utilizando la variable a , como parámetro de bifurcación (Li y Yorke, 1975; Seddley, 2002).

3 PROPIEDADES GEOMÉTRICAS.

El mapa escalar (11) describe el comportamiento del ciclo de trabajo proporcionando su valor actual respecto al valor anterior. El punto fijo x^* del mapa escalar (11) es determinado por la intersección de la imagen de las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = a(1-x)$ que son suaves y continuas en x . En la práctica se busca que el punto de operación del ciclo de trabajo se encuentre en el intervalo $(0, 1)$, por lo tanto, este es el rango de interés sobre la ubicación del punto fijo del mapa escalar dado por (11). El siguiente resultado proporciona las condiciones necesarias que permiten ubicar el punto fijo en el intervalo $(0, 1)$.

Lema 1. Considerar el mapa escalar $x_{k+1} = f(x_k)$ donde la regla de asignación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por (11). Entonces existe un punto fijo dado por: $x^* = \frac{a}{a+1}$. ■

Lema 2. Sea x^* el punto fijo de la regla de asignación (11) donde x^* pertenece al intervalo $(0, 1)$ si $a > 0$. ■

Prueba. Asíumase que $J \rightsquigarrow J$ y $[0, 1] \subseteq J$, entonces por el Lema 1 se concluye la existencia del punto fijo x^* . Acotando el valor del punto fijo en el intervalo deseado se obtiene: $0 < a/(1+a) < 1$; de donde por manipulación algebraica se obtiene $a > 0$. ■

Teorema 3 (Li y Yorke, 1975). Sea $J \subseteq [\gamma, \delta]$ un intervalo cerrado tal que $J \rightsquigarrow J$. La regla de asignación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto fijo asintóticamente estable x^*

si y solo si $|df(x)/dx| < 1$ en $x^* \in J$ y condición inicial $x_0 \in J$. ■

Observación. Del Lema 1 se tiene que la regla de asignación tiene un punto fijo x^* . Además del Teorema 3, el punto de equilibrio es asintóticamente estable si $|df(x)/dx| < 1$ evaluada en x^* , por lo tanto el punto de equilibrio x^* es estable si se cumple $|a| < 1$. Ahora bien, del Lema 2 $x^* \in (0, 1)$ si se cumple $a > 0$. Reuniendo éstas condiciones se tiene que $a \in (0, 1)$.

Teorema 4. Sea $x_{k+1} = f(x_k)$ el mapa escalar donde la regla de asignación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por (11) para algún valor inicial x_0 perteneciente al intervalo $J = [\gamma, \delta]$ que contiene el punto fijo x^* . Si $|df(x)/dx| < 1$, entonces no hay puntos periódicos con $n \geq 2$. ■

Prueba. La derivada del mapa (11) evaluada en el punto fijo x^* está dada por $\frac{df(x^*)}{dx} = -a$, donde el criterio de estabilidad $|df(x)/dx| < 1$ implica que $|a| < 1$. Ahora es suficiente con probar que el mapa escalar bajo la regla de asignación (11) no tiene puntos periódicos con periodo dos. Por definición la composición $f \circ f(x) = f(f(x)) = x$ corresponde al punto x con periodo dos que está contenido en el intervalo J . De esta forma la composición $f(f(x)) = x$ está dada por $f^2(x) = a[1 - a(1-x)] = x$. Luego, por manipulación algebraica, tenemos $a - a^2 + a^2x - x = 0$. Puesto que el punto fijo x^* satisface $f(x^*) = x^*$ y por lo tanto satisface $f^2(x^*) = x^*$ lo factorizamos para obtener una solución diferente de x^* , entonces se obtiene $(a+1)(a-1) = 0$ que no tiene una solución que cumpla $|-a| < 1$; lo cual completa la prueba. ■

Teorema 5. Sea $J = [\gamma, \delta]$ un intervalo cerrado para las constantes γ y δ tal que $J \rightsquigarrow J$. El mapa escalar (11) tiene un punto periódico x^p , con un periodo a lo mucho igual a dos ($p = 2$), perteneciente a la vecindad $\Omega \subset J$ del punto fijo x^* , si y solo si $|df(x)/dx| = 1$ evaluada en el punto fijo x^* perteneciente a J , para cualquier condición inicial x_0 en el intervalo J . ■

4 SIMULACIONES NUMERICAS.

En lo que sigue se presentan simulaciones numéricas donde se ilustra el comportamiento dinámico del mapa escalar (11). Éstas fueron realizadas para el caso en que se satisface la existencia del punto de equilibrio x^* en el intervalo $(0, 1)$. La figura 3 muestra el comportamiento dinámico del ciclo de trabajo cuando $a < 1$, nótese que la trayectoria converge al punto fijo x^* . en la Figura 4 se muestra el caso cuando $a = 1$; note que la trayectoria es periódica en la vecindad del punto fijo x^* . Finalmente si $a > 1$, la trayectoria diverge del punto fijo x^* (ver Fig. 5).

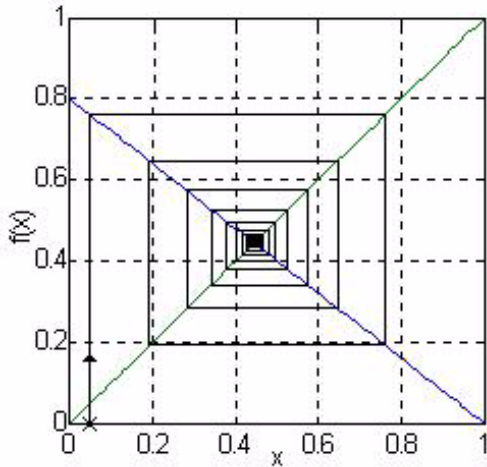


Figura 3. Trayectoria que converge al punto fijo x^* . $a = 0.8$, $M < 1$ y $x^* = 0.44$.

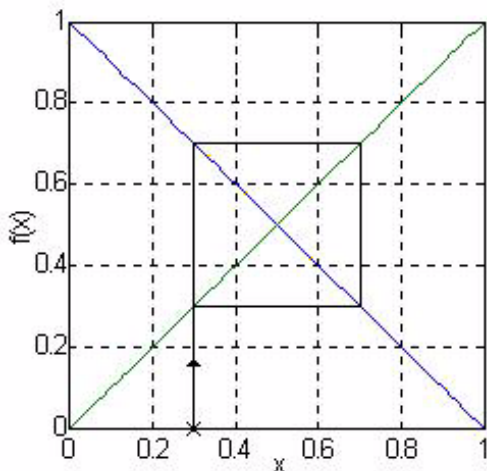


Figura 4. Trayectoria periódica. $a = 1$, $M = 1$ y $x^* = 0.5$.

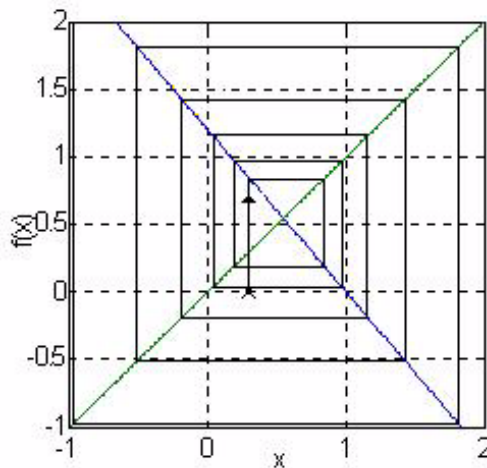


Figura 5. Trayectoria inestable. $a = 1.2$, $M > 1$ y $x^* = 0.54$.

Las Figuras 6 y 7 muestran los valores que toma el ciclo de trabajo en cada iteración de los mapas escalares. En la Fig. 6, la línea discontinua corresponde a la Fig. 3 donde $a = 0.8$ y $x^* = 0.44$. Nótese que para $a = 0.3$ el ciclo de trabajo converge a $x^* = 0.23$ cuando $k \approx 6$ (línea continua) y para $a = 0.8$ el ciclo de trabajo converge a x^* cuando $k \approx 25$. Finalmente en la Fig. 7 se muestran los valores que toma el ciclo de trabajo cuando la trayectoria es periódica (línea continua con $a = 1$) y cuando la trayectoria diverge del punto fijo (línea discontinua con $a = 1.2$).

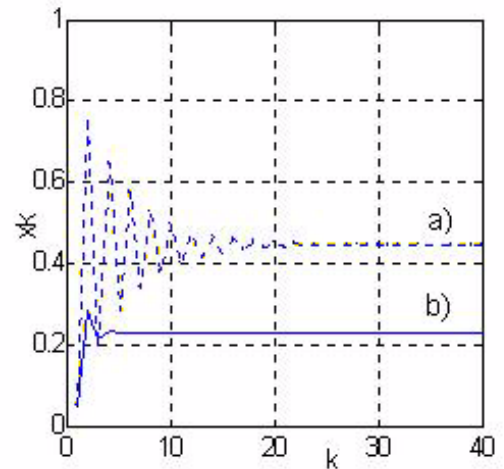


Figura 6. Ciclo de trabajo respecto a la k -ésima iteración. a) $a = 0.8$ y $x^* = 0.44$; b) $a = 0.3$ y $x^* = 0.23$

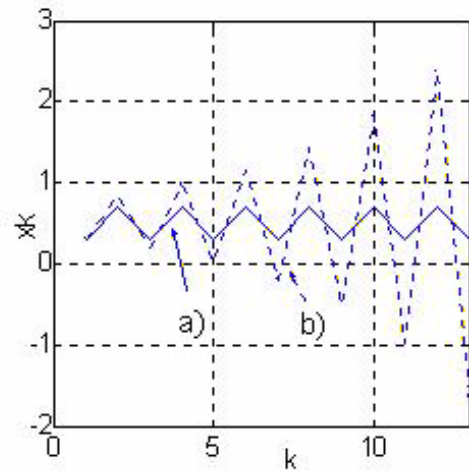


Figura 7. Ciclo de trabajo respecto a la k -ésima iteración. a) $a = 1$ y $x^* = 0.5$; b) $a = 1.2$ y $x^* = 0.54$

En la Figura 7 se puede observar que la tasa de convergencia al punto fijo depende directamente de la pendiente de $f(x)$ en x^* ; si la pendiente disminuye, entonces la tasa de convergencia aumenta (ver Figs. 3 y 4). Ahora bien, los parámetros físicos más importantes son el valor de la

ganancia del lazo de corriente N y de las variaciones en la carga R . La dependencia del parámetro a respecto a éstos se relaciona, respectivamente, con las siguientes expresiones

$$N = \frac{v_{co}RL}{ER_s(L + 2R^2C)} \quad (12)$$

$$R = \frac{Lv_{co} + \sqrt{(Lv_{co})^2 - 8N^2R_s^2CE^2L}}{4NR_sCE} \quad (13)$$

En las Figuras 8 y 9 se ilustra el parámetro a como una función de N y R respectivamente.

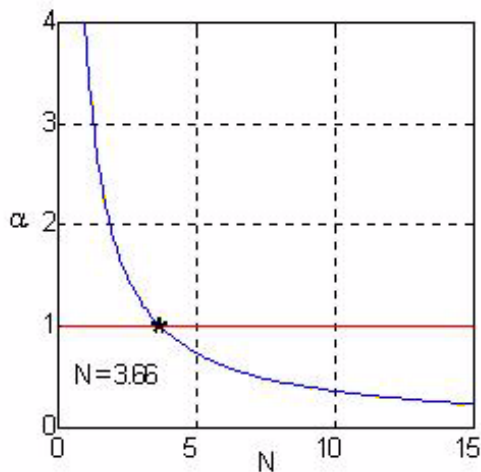


Figura 8. Parámetro a como función de N .

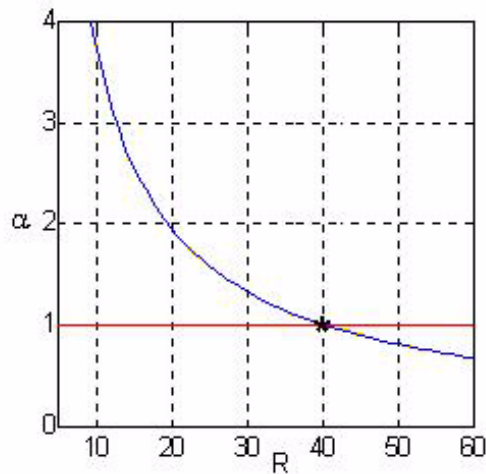


Figura 9. Parámetro a como función de R .

Nótese que si $N < 3.66$ (o $R < 40$), entonces $a > 1$ y el mapa escalar presentará una trayectoria inestable. Cuando $N = 3.66$ ($R = 40$) a toma su valor crítico y la trayectoria será periódica. Finalmente, si $N > 3.66$ ($R > 40$) entonces $a < 1$ y la trayectoria convergerá al punto fijo. El valor de los parámetros físicos del convertidor

elevador usados para obtener las gráficas fueron tomados de Chan y Tse, (1997).

5 CONCLUSIONES.

El estudio del ciclo de trabajo se ha llevado a cabo a partir de un mapa escalar donde la regla de asignación está dada por una aproximación lineal a la solución de las ecuaciones que gobiernan el ciclo de trabajo del convertidor elevador. La regla de asignación es obtenida de las formas de onda y el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento dinámico del convertidor elevador controlado bajo el esquema de control en modo corriente pico. En este trabajo se han proporcionado las herramientas necesarias para caracterizar el comportamiento dinámico del ciclo de trabajo alrededor del punto fijo para esta clase de convertidores. Con ello, se complementan los resultados previos reportados por Sedley (2002). Se demuestra que la rapidez de convergencia al punto fijo depende directamente del valor del parámetro a de la regla de asignación (11). Finalmente se relaciona el parámetro de bifurcación a con los parámetros físicos del convertidor. Los resultados de este trabajo pueden ser extendidos a los convertidores reductor, elevador-reductor y Čuk y resultados en este sentido serán reportados en breve.

BIBLIOGRAFÍA

- Arrowsmith, D. K. & Place, C. M. (1994). An introduction to dynamical systems, Cambridge University Press.
- Banerjee, S. & Chakrabarty, K. (1998). Nonlinear modeling and bifurcations in the Boost converter, IEEE Trans. Circ. and Syst. I, Vol 13, No. 2, pp. 252-260.
- Banerjee, S.; Ranjan, P. & Grebogi, C. (2000). Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps-theory and applications in switching circuits, IEEE Trans. Circ. and Syst. I, Vol 47, No. 5, pp. 633-643.
- Chan, W. C. Y. & Tse, C. K. (1997). Study of bifurcation in current-programmed DC/DC Boost converter: from quasi-periodicity to period-doubling, IEEE Trans. Circ. and Syst. I, Vol 44, No. 12, pp. 1129-1142.
- Deane, J. H. B. (1992). Chaos in current-mode controlled Boost DC-DC converter, IEEE Trans. Circ. and Syst. I, Vol 39, No. 8, pp. 680-683.
- Deane, J. H. B. & Hamill, D. C. (1990). Instability, subharmonics and Chaos in power electronics circuits, IEEE Trans. Power Electron., vol 5, no. 3, pp. 260-268.

di Bernardo, M. & Vasca, F. (2000). Discrete-time maps for the analysis of bifurcation and chaos in DC/DC converters, *IEEE Trans. Circ. and Syst. I*, Vol 47, No. 2, pp. 130-143.

Hamill, D. C.; Deane, J. H. B. & Jefferies, D. J. (1992). Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings, *IEEE Trans. Power Electron.*, Vol 7, No. 1, pp. 25-36.

Kassakian, J. G.; Schlecht, M. F. & Verghese G. C., (1991). *Principles of Power Electronics*, Addison-Wesley.

Li, T. Y. & Yorke, J. A. (1975). Period Three implies chaos, *Am. Math. Monthly*, vol 82, pp. 985-992.

Lu, H. H. & Tse, C. K. (2001). Bifurcation behavior in parallel-connected Buck converters, *IEEE Trans. Circ. and Syst. I*, Vol 48, No. 2, pp. 233-240.

Middlebrook, R. D., (1989). Modeling Current-Programmed Buck and Boost Regulators, *IEEE Trans. on Power Electron.*, Vol 4, No. 1.

Mohan, N.; Undeland, T. M. & Robbins, W. P. (1989). *Power Electronics: Converters, Applications and Design*. Wiley.

Sedley, K. (2002). Tricks of the trade: Poincare stability analysis of switching converters with nonlinear control, *IEEE Power Electron. Newsletters*, pp. 5-6.

Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley.

Tse, C. K.; Lai, Y. M. & Lu, H. H. (2000). Hopf bifurcation and chaos in free-running current-controlled Ćuk switchin regulator, *IEEE Trans. Circ. and Syst. I*, Vol 47, No. 4, pp. 448-457.

Verghese, G. C.; Bruzos, C. A. & Mahabir, K. N. (1989). Averaged and Sampled-Data Models for Current Mode Control: a Reexamination, in *IEEE PESC*.

Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag.