

## ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA CONVERTIDORES ELEVADORES DE DOS ETAPAS EN MODO CORRIENTE

**Jorge Alberto Morales-Saldaña<sup>(\*)</sup>, Homero Grimaldo-Govea<sup>(\*)</sup>, Margarito Martínez-Cruz<sup>(\*)</sup> y Jesús Leyva Ramos<sup>(+)</sup>**

<sup>(\*)</sup>*Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Av. Dr. Manuel Nava No. 8, San Luis Potosí, S.L.P. 78290, MEXICO,  
Email: [jmorales@uaslp.mx](mailto:jmorales@uaslp.mx)*

<sup>(+)</sup>*Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica,  
Camino a la Presa San José # 2055, Lomas 4<sup>a</sup> Sección, San Luis Potosí, S.L.P., 78216  
MEXICO  
Email: [jleyva@ipicyt.edu.mx](mailto:jleyva@ipicyt.edu.mx)*

Resumen- En este artículo se presenta el modelo con incertidumbres para los convertidores elevadores en cascada. El modelo resultante es representado por una transformación lineal fraccional (LFT) con incertidumbres dinámicas estructuradas. El interés de este trabajo es motivado por la necesidad de tener modelos de convertidores CD-CD que sean compatibles con el análisis de control robusto. La estructura de estos modelos consiste de un modelo nominal y el modelado de las incertidumbres acotadas. Al final se presenta el análisis de estabilidad robusta de un convertidor elevador en cascada de 46 W y resultados experimentales

Palabras Clave: Controladores PI, Fuentes de alimentación, Convertidores CD-CD, Reguladores Conmutados.

### 1. INTRODUCCIÓN.

En las últimas décadas se han encontrado un gran número de aplicaciones para los convertidores de CD-CD (Kassakian *et al.*, 1991). En años recientes, el desarrollo de nuevas tecnologías de circuitos integrados requiere de relaciones de conversión mayores de voltajes ó corrientes. Un esquema que provee de mayores relaciones de conversión es la conexión en cascada. Este esquema es una aproximación de multietapas que consiste de dos o más convertidores conectados en cascada. La aplicación de este tipo de convertidores se encuentra en el uso de sistemas de alimentación distribuidos (DPS) y en sistemas de alimentación con corrector de factor de potencia (PFC) (Byungcho, 1999). El caso de los convertidores en cascada con solamente dos etapas ya ha sido tratado en la literatura (Maksimovic y Cuk, 1991; Pacheco *et al.*, 2000) y las referencias en ellos, en donde solamente las condiciones de CD

han sido discutidas con algunas topologías que reducen el número de elementos requeridos.

Un esquema del convertidor elevador de dos etapas conectado en cascada es presentado en la Fig. 1. Para este arreglo se tiene que la ganancia de voltaje CD en función del ciclo de trabajo es  $1/(1-U_1)(1-U_2)$ , siendo  $U_1$  y  $U_2$  los ciclos de trabajo de los interruptores 1 y 2 respectivamente.

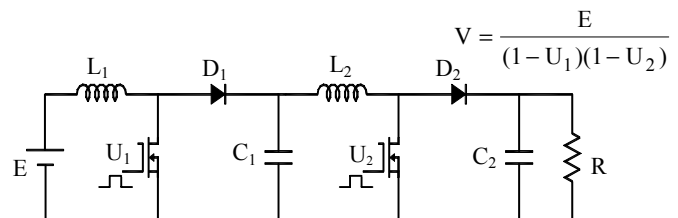


Fig. 1. Convertidor elevador de dos etapas.

El proceso de diseño de un controlador robusto requiere de un modelo que tome en consideración las incertidumbres de la planta (Zhuo y Doyle, 1998). Sin embargo, el diseño del controlador para convertidores conmutados de CD-CD ha seguido una aproximación clásica. Algunas estrategias de control tales como lineal y  $H_\infty$  usadas para el diseño de controladores emplean modelos determinísticos de los convertidores (Ben-Yakov *et al.*, 1997; Buso, 1999; Leyva y Morales, 1998) y las numerosas referencias en ellos.

El interés de construir modelos con incertidumbres para convertidores conmutados CD-CD comienza con la necesidad de tener modelos compatibles con el diseño de control robusto. Las incertidumbres paramétricas en convertidores en cascada se encuentran en: la resistencia de carga  $R = R_0(1+\delta_R)$ , inductancias  $L_1 = L_{10}(1+\delta_{L1})$ ,  $L_2 = L_{20}(1+\delta_{L2})$ , y capacitancias  $C_1 = C_{10}(1+\delta_{C1})$ ,  $C_2 = C_{20}(1+\delta_{C2})$ . Donde  $R_0$ ,  $L_{10}$ ,  $L_{20}$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{20}$  corresponden a los valores nominales de  $R$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $\delta_R$ ,  $\delta_{L1}$ ,  $\delta_{L2}$ ,  $\delta_{C1}$ ,  $\delta_{C2}$  corresponden a las incertidumbres asociadas a estos. Las incertidumbres asociadas a los elementos semiconductores y elementos parásitos no son considerados.

**2. MODELOS CON INCERTIDUMBRES.**

El comportamiento dinámico de muchas clases de circuitos de potencia puede analizarse usando la idea de modelos promedios linealizados, los cuales pueden ser representados en su realización de espacio de estados o en funciones de transferencia. Estableciendo el análisis de realización de espacio de estados, es posible describir el modelo del convertidor en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_p \tilde{u} \\ y &= C_p x + D_p \tilde{u} \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $A_p \in R^{4 \times 4}$ ,  $B_p \in R^{4 \times 1}$ ,  $C_p \in R^{4 \times 4}$ ,  $D_p \in R^{2 \times 1}$  y  $\tilde{x} = [\tilde{i}_{L1} \ \tilde{i}_{L2} \ \tilde{v}_{C1} \ \tilde{v}_{C2}]^T$ . Con esta representación es posible obtener las funciones de transferencia de las señales de salida con respecto a las señales de control (ciclos de trabajo y voltaje de entrada) como se muestra a continuación:

$$G(s) = D_p + C_p (sI - A_p)^{-1} B_p \tag{2}$$

El modelo promedio linealizado resultante del convertidor elevador en cascada es mostrado en (3). Se puede notar inmediatamente la estructura del modelo y su simplicidad (Morales-Saldaña, *et al.*, 2002). En el diseño del controlador para el convertidor elevador se propone, por simplicidad, que los dos interruptores (MOSFET) actúan con la misma señal de control, debido a esto se considera como un sistema SISO, con esto  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = \tilde{u}$  y  $\tilde{\epsilon} = 0$ .

$$\begin{bmatrix} \tilde{i}_{L1} \\ \tilde{i}_{L2} \\ \tilde{v}_{C1} \\ \tilde{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(1-U_1)}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{(1-U_2)}{L_2} \\ \frac{(1-U_1)}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-U_2)}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i}_{L1} \\ \tilde{i}_{L2} \\ \tilde{v}_{C1} \\ \tilde{v}_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{C1}}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{V_{C2}}{L_2} & 0 \\ -\frac{I_{L1}}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_{L2}}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{\epsilon} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Se propone describir al sistema a través de una transformación lineal fraccional (LFT), el cual adopta el diagrama de bloques en donde las incertidumbres son agrupadas en un bloque  $\Delta$  mostrado en la Fig. 2. Típicamente,  $P$  representa el modelo nominal del sistema, el cual a menudo se asume como la función de transferencia de la planta.

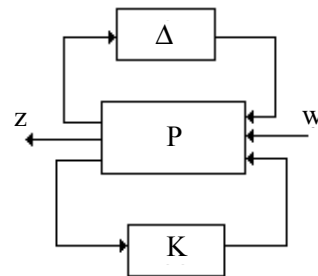


Fig. 2 Representación de un sistema de control con incertidumbres (LFT).

Cada fuente de perturbación entra al sistema real en una localización diferente. Cuando estas perturbaciones son agrupadas en un simple bloque de incertidumbres,  $\Delta$  resulta tener una estructura diagonal, la cual es llamada perturbación estructurada.

Tal perturbación es comúnmente acotada. Sea P una matriz compleja particionada como:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \in C^{6 \times 5} \quad (4)$$

con  $\Delta = \text{diag}(\delta_R, \delta_{L1}, \delta_{L2}, \delta_{C1}, \delta_{C2})$ , si la inversa es bien definida, la LFT inferior puede ser expresada con respecto a  $\Delta$  como:

$$F_l(P, \Delta) = P_{22} + P_{12}\Delta(I - P_{22}\Delta)^{-1}P_{21} \quad (5)$$

Una expresión similar es obtenida para una LFT superior. Estas transformaciones pueden ser usadas para establecer las relaciones entre funciones de transferencia y su realización de espacio de estados. Para el diseño del controlador se establece que las señales de retroalimentación son la corriente del inductor de la primera etapa y el voltaje de salida ( el voltaje del capacitor de la segunda etapa), además, la señal de control u es la misma para ambas etapas. El sistema (1), tiene una función de transferencia dada por (2). Esta puede ser expresada a su vez como:

$$G(s) = F_u \left( \begin{bmatrix} A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix}, \frac{I_4}{s} \right) \quad (6)$$

En (2) se puede notar que cada parámetro del convertidor aparece en forma inversa, ahora, al introducir las incertidumbres ( $\delta_R, \delta_{L1}, \delta_{L2}, \delta_{C1}, \delta_{C2}$ ) y las cuales se asumen desconocidas; estas pueden representarse como una LFT en  $\delta$  como:

$$\frac{1}{R_o(1+\delta_R)} = \frac{1}{R_o} - \frac{\delta_R(1+\delta_R)^{-1}}{R_o} \quad (7)$$

Así, el sistema perturbado puede ser descrito vía la formula de LFT en donde la función de transferencia es representada como un sistema nominal y una incertidumbre que entra como una ganancia de retroalimentación. Cuando los parámetros nominales son perturbados, la función de transferencia dada resulta en  $G(s) = F_u(P_\delta, I_4/s)$ .

Además, la matriz perturbada  $P_\delta$  puede ser representada como una LFT con una matriz nominal P y una incertidumbre  $\Delta = \text{diag}(\delta_R, \delta_{L1}, \delta_{L2}, \delta_{C1}, \delta_{C2})$ . Entonces la expresión (6) puede ser representada por dos LFTs como:

$$G(s) = F_u(F_l \left( \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Delta \right), \frac{I_4}{s}) \quad (8)$$

Una representación pictórica de las dos LFTs es mostrada en la Fig. 3 donde las incertidumbres están dadas en el lazo inferior. Cuando el procedimiento anterior es aplicado al convertidor, la matriz  $P_\delta$  es obtenida. En el caso de las incertidumbres en la resistencia de carga el modelo resultante es:

$$P_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1-U}{L_{10}} & 0 & \frac{-V}{L_{10}(-1+U)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{20}} & \frac{1-U}{L_{20}} & \frac{V}{L_{20}(-1+U)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1-U}{C_{10}} & \frac{-1}{C_{10}} & 0 & 0 & \frac{-V}{C_{10}R_o(-1+U)^4} & 0 & \frac{V}{C_{10}R_o} \\ 0 & \frac{1-U}{C_{20}} & 0 & -1 & \frac{V}{C_{20}R_o(-1+U)^3} & \frac{1}{C_{20}R_o} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-V}{(-1+U)^3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{V}{(-1+U)^4} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los modelos con incertidumbres son muy simples y compatibles con el diseño de control robusto y también pueden ser usados para probar la robustez de varias estrategias de control.

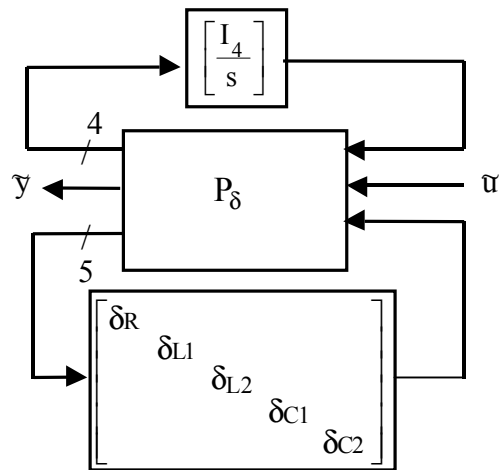


Fig. 3 Representación de espacio de estado con incertidumbres.

**3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA.**

Como se mencionó, para realizar el análisis de robustez se requiere mostrar al sistema de control en un marco en el cual sean consideradas las incertidumbres de la planta, en este caso el convertidor elevador en cascada. El marco general de modelado de un sistema de control es presentado en la Fig.4, en este caso el sistema admite la descripción en LFT.

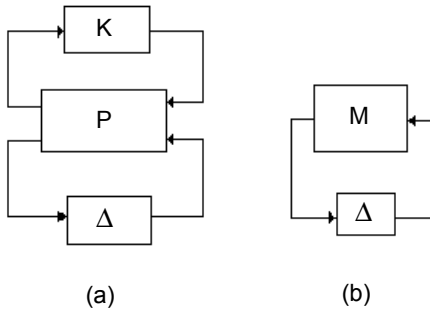


Fig. 4 Marco general de análisis de estabilidad robusta: (a) Interconexión del sistema, y (b) Esquema principal para análisis de estabilidad.

Las incertidumbres paramétricas del convertidor que corresponden a R, L y C se aíslan y agrupan en el bloque Δ. La estabilidad de tal conexión puede ser analizada usando el concepto de valor singular estructurado (SSV o μ) (Packard and Doyle , 1993):

Para  $M(s) \in C$ ,  $\mu_{\Delta}(M(s))$  se define como

$$\mu_{\Delta}(M(s)) := \frac{1}{\min\{\sigma(\Delta) : \Delta \in \Delta', \det(I - M(s)\Delta) = 0\}}$$

si no existe Δ tal que  $\det(I - M(s)\Delta) = 0$ , entonces  $\mu(M(s)) = 0$ .

donde σ denota el máximo valor singular. Si M es una matriz de transferencia estable, la condición necesaria y suficiente para estabilidad robusta del sistema interconectado para todas las perturbaciones  $\|\Delta\|_{\infty} < 1/\beta$  es que  $\mu_{\Delta}(M(s)) \leq \beta$ . La estabilidad robusta garantiza estabilidad para todas las posibles plantas en el conjunto.

Es bien conocido que el uso de μ para análisis de robustez es realizado en el dominio de la frecuencia, empleando la siguiente igualdad:

$$\sup_{s \in \bar{C}_+} \mu_{\Delta}(M(s)) = \sup_{\omega \in R} \mu_{\Delta}(M(j\omega)). \quad (10)$$

En este marco, se analizan los controladores para reguladores conmutados. Los esquemas de control principales para reguladores conmutados son: (a) control en modo-voltaje y (b) control en corriente programada. El control en corriente programada además del lazo de voltaje también se agrega un lazo de corriente, el cual se construye retroalimentando una señal de corriente, ya sea la corriente de inductor o del transistor de potencia. Este esquema de control es conocido como control multilazo debido a la presencia de dos lazos de control. La configuración del esquema de control es mostrada en la Fig. 5, en la cual se usa un controlador PI que da una solución satisfactoria para este tipo de sistemas.

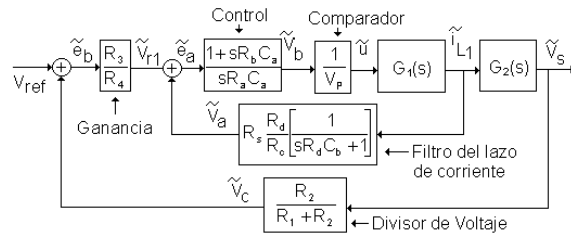


Fig. 5 Diagrama de bloques del control en corriente promedio.

Estos esquemas de control han sido ampliamente utilizados en convertidores conmutados básicos de una sola etapa (Middlebrook, 1984; Leyva and Morales, 1996). Como se puede observar, la señal moduladora es la señal de control  $\tilde{u}$  la cual es inyectada al convertidor. Esta señal de control puede ser expresada en términos de  $\tilde{I}_{L1}$  y  $\tilde{V}_{C2}$  (11). Para unificar el marco de análisis se requiere expresar  $\tilde{U}$  como una LFT, siendo la cuatripleta  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$  (12).

$$\tilde{u} = -\tilde{V}_{C2} \left[ \frac{R_3 R_2}{s R_a C_a R_4 V_p} \right] \left[ \frac{1 + s R_b C_a}{R_1 + R_2} \right] - \tilde{I}_{L1} \left[ \frac{R_s R_d}{s R_a C_a R_c V_p} \right] \left[ \frac{1 + s R_b C_a}{1 + s R_d C_b} \right] \quad (11)$$

Para realizar el análisis de estabilidad robusta con diferentes esquemas de control y compensación se requiere que estén representados en un marco de LFTs. Con el modelo del convertidor P y el controlador K se forma la matriz M, siendo esta la representación del sistema en lazo cerrado.

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{R_d C_b} & 1 & -\frac{R_2 R_3}{V_p R_a C_a R_4 (R_1 + R_2)} & -\frac{R_b R_s}{V_p R_a R_c C_b} \\ 0 & 0 & \frac{R_2 R_3}{V_p R_a C_a R_4 R_d C_b (R_1 + R_2)} & -\frac{R_s}{V_p R_a C_a R_c C_b} \\ \hline 1 & 0 & -\frac{R_2 R_3 R_b}{V_p R_a R_4 (R_1 + R_2)} & 0 \end{array} \right]$$

**4. RESULTADOS EXPERIMENTALES.**

El esquema de control propuesto se implementó a un convertidor elevador de dos etapas Fig. 6, con los siguientes parámetros: frecuencia de conmutación  $f_s = 25 \text{ KHz.}$ , Voltaje de entrada  $E = 12 \text{ V}$ , Voltaje de salida  $V_o = 48 \text{ V}$ , Potencia de salida  $P = 46 \text{ W}$ ,  $V_{ref} = 1.3 \text{ V}$ ,  $U = 0.5$ ,  $C_1 = 22 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 100 \mu\text{F}$ ,  $L_1 = 80 \mu\text{H}$  y  $L_2 = 600 \mu\text{H}$ ,  $R = 50.5 \Omega$ ,  $C_b = 0.1 \mu\text{F}$ ,  $R_d = 560 \Omega$ ,  $R_c = 47 \Omega$ ,  $C_a = 15 \text{ nF}$ ,  $R_b = 22 \text{ k}\Omega$  y  $R_a = 150 \text{ k}\Omega$ .

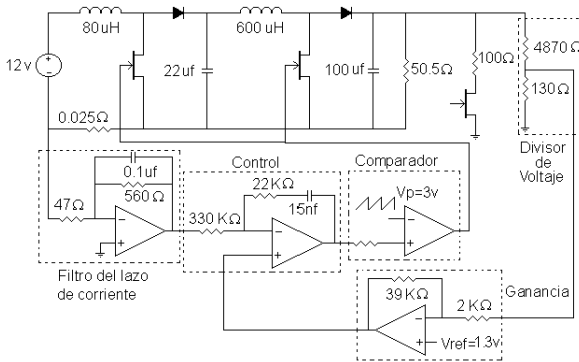


Fig. 6. Diagrama del regulador elevador de dos etapas con control por corriente promedio.

Un aspecto importante para el análisis de estabilidad robusta es obtener la máxima contribución de las incertidumbres en el dominio de la frecuencia. Con este fin se requiere obtener el comportamiento con la respuesta en frecuencia del sistema interconectado. Calculando el máximo valor para la incertidumbre en el convertidor CD-CD y graficando el límite en función de la frecuencia como se muestra en la Fig. 7. Se obtiene el valor máximo de incertidumbre permisible antes de que el sistema se haga inestable. De la gráfica se obtiene  $\mu(M(j\omega)) = 2.82$  a partir del cual se puede calcular el valor máximo de incertidumbre como  $|\delta_R| = 1/\mu(M(j\omega)) = 0.3546$ .

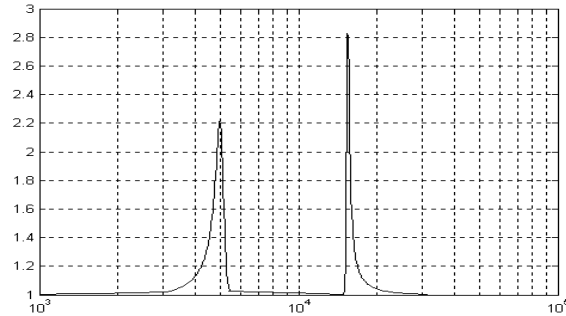


Fig. 7. Gráfica del límite de incertidumbre para el convertidor elevador de dos etapas CD-CD.

En la práctica la contribución más importante en la incertidumbre es negativa. Esto es  $\delta_R = -0.3546$  con la cual se obtiene un valor en la resistencia de carga de  $R^+ = R(1 - \delta_R) = 32.59 \Omega$ , este resultado se interpreta como el valor mínimo en la resistencia de carga en el cual el sistema es marginalmente estable.

Es claro que uno de los aspectos más importantes para los reguladores conmutados es la estabilidad a variaciones de carga ( $\delta_R$ ) ya que dependiendo de las aplicaciones suelen existir cambios en el requerimiento de potencia entregada. Las pruebas realizadas consisten primero en operar el regulador en condiciones nominales, para posteriormente aplicar un escalón en la carga con el valor obtenido de la resistencia  $R^+$  que provoca la inestabilidad del sistema.

Una vez establecido el comportamiento del convertidor en condiciones nominales se procede a aplicar un escalón en la carga, esto se realiza conectando una resistencia en paralelo de  $100 \Omega$  para obtener una resistencia de  $R^+ = 33.55 \Omega$ . Este valor es próximo al valor obtenido en el análisis, esto es para evitar el daño de algún componente del convertidor.

Para observar la robustez del regulador a cambios de carga se realizaron pruebas en las cuales la resistencia de carga nominal de  $50.5 \Omega$  es reducida a  $37.5 \Omega$ . Este cambio de carga corresponde a un aumento de potencia del 25 %, resultando en una potencia de 60 W de salida, Fig. 8. Como se observa, el voltaje de salida se mantiene regulado aun en presencia de las variaciones de carga.

En la Fig. 9 se muestra el comportamiento del convertidor ante escalones de carga donde el valor

nominal es de  $50.5 \Omega$  y el escalón aplicado es de  $33.5 \Omega$ . Este valor de resistencia de carga es muy proximo al valor obtenido del análisis de estabilidad. Se puede observar que se presentan oscilaciones en la corriente  $L_1$  y estas tienden a aumentar. En el voltaje de salida también se presentan oscilaciones de aproximadamente el 30% del valor nominal.

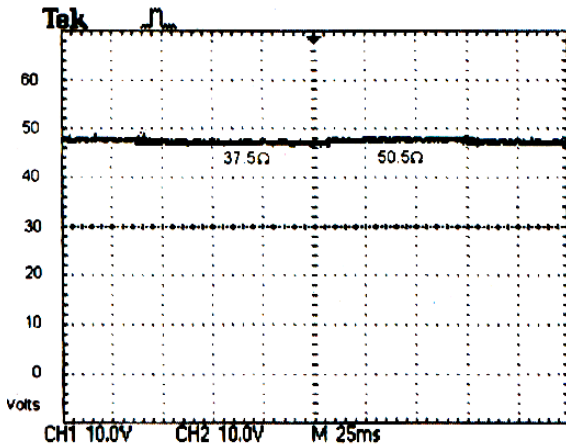


Fig. 8 Respuesta del voltaje de salida a un escalón en la carga .

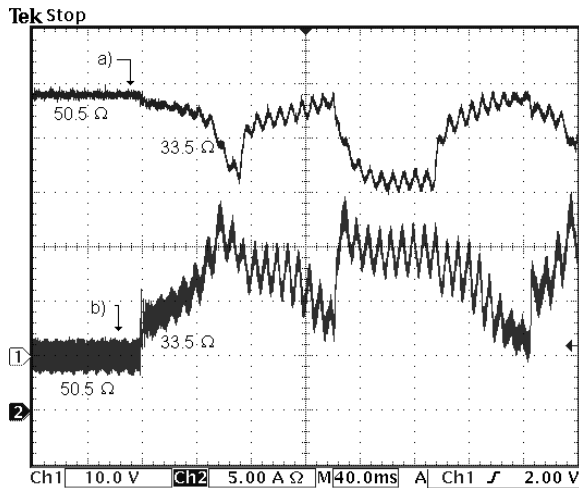


Fig. 9 Escalón de carga: a) Voltaje de entrada, b) Corriente en  $L_1$

Como se puede observar en la Fig. 9, la evidencia más clara de inestabilidad del sistema se da en la corriente de entrada, la cual al aplicar el escalón de carga comienza a tener una oscilación y el sistema no es capaz de controlarla , al regresar al valor nominal de la carga el sistema tiende a estabilizarse.

## 5. CONCLUSIONES.

El modelo del convertidor elevador de dos etapas ha sido extendido para incluir las perturbaciones asociadas a las incertidumbres. Con el modelo resultante, el problema de análisis de estabilidad robusta de controladores en el marco de  $\mu$ , puede ser fácilmente resuelto. La contribución más importante de este método es la generalidad que presenta para analizar diferentes esquemas de control. Los modelos con incertidumbres de los convertidores se mantienen y solo se requiere adecuar los diferentes esquemas de control en LFT para unificar el marco de análisis. Posteriormente se aplica el criterio de estabilidad empleando  $\mu$ .

## AGRADECIMIENTO.

Se agradece el apoyo de PROMEP para el financiamiento de este trabajo.

## REFERENCIAS.

- Byungcho, Choi; Cho, Bo H. and Hong, Sung-Soo (1999). "Dynamics and control of DC-to-DC converters driving other converter downstream". *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Part I, Vol. 46, No. 10, pp. 1240-1248, Oct.
- Ben-Yaakov R. Naim, and G. Weiss, (1997), " Control applied to boost power converters", *IEEE Trans. on Power Electron.*, vol. 12, no. 4, pp. 667-683, July.
- Buso S. (1999), "Design of a robust control for buck-boost converters using  $\mu$ -Synthesis", *IEEE Trans. on Control Sys. Tech.* , vol. 7, no. 2 , pp. 222-229, Mar.
- Kassakian, J. G.; Schlecht, M. F. & Verghese, G.C. (1991). *Principles of Power Electronics*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Leyva-Ramos, J. & Morales-Saldaña, J. A. (1998), "A design criteria for the current gain in current programmed regulators". *IEEE Trans. Industrial Electron.*, Vol. 45, No. 4, pp. 568-573, July/Aug.
- Maksimovic, D. & Cuk, S. (1991), "Switching converters with wide dc conversion range", *IEEE Trans. On Power Electron.*, Vol. 6, No. 1, pp. 151-157, Jan.
- Morales-Saldaña, J. A.; Carbajal-Gutierrez, E. E. & Leyva-Ramos, J. (2002), "Modeling of Switch-Mode DC-DC Cascade Converters", *IEEE Trans. On Aerospace and Electron. Systems*, Vol. 38, No. 1, pp. 295-299, Jan.
- Packard and J. C. Doyle, (1993), "The complex structured singular value," *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 71-109, Jan.
- Zhou K. and J. C. Doyle (1998), *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.