

Regulación Robusta para un Péndulo Invertido Giratorio

O. Espinosa-Guerra *, B.Castillo-Toledo y G.Obregón-Pulido *

CINVESTAV-Guadalajara Prol. López Mateos Sur 590, 45090 Guadalajara Jal., México

* CETI-Colomos Nueva Escocia 1885, C.P. 44620 Guadalajara Jal., México

email: omar_esp@yahoo.com, toledo@gdl.cinvestav.mx, gob1mx@gdl.ceti.mx

Resumen— En este artículo se presenta un esquema robusto de control para el sistema no lineal de un péndulo invertido giratorio, el cual no satisface las llamadas condiciones de FIB para la existencia de la solución del regulador robusto, es decir, el caso cuando alguna condición necesaria para la detectabilidad con respecto a las salidas medibles no se cumple. Se muestra que bajo ciertas condiciones adicionales el esquema propuesto garantiza error cero en el seguimiento de la salida entre la salida real y la señal de referencia deseada, a pesar de la presencia de variaciones en los parámetros.

Keywords— Sistemas no lineales, teoría de regulación, control robusto.

I. INTRODUCCIÓN

El problema de forzar la salida de un sistema para seguir, al menos asintóticamente, una señal de referencia definida, preservando al mismo tiempo algunas de las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado, ha sido uno de los problemas interesantes que se han planteado en la teoría de control. Este problema ha sido estudiado bajo una diversidad de métodos, y en particular el llamado, problema del regulador, ha ofrecido un marco para lograr tales objetivos. El problema del regulador para sistemas sujetos a perturbaciones externas y señales de referencias, ambas generadas por un sistema dinámico conocido, llamado exosistema, consiste en hallar un controlador por retroalimentación de estado o de error tal que el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado sin señales externas es asintóticamente estable y el error de seguimiento tiende a cero, cuando el sistema está bajo la influencia de los estados del exosistema. El problema del regulador ha sido estudiado intensivamente tanto en el caso lineal [5] y más recientemente en el caso no lineal [10][9]. Para el caso lineal, en [6] para el caso lineal, una solución del problema fue propuesta en términos de la solución de ciertas ecuaciones matriciales (ecuaciones de Francis). Francis también mostró que el problema de regulación robusta, llámese el problema de asegurar las propiedades de regulación para toda variación de los parámetros en una vecindad de los valores nominales, podía ser resuelto mediante un controlador dinámico que contiene un modelo interno; es decir, un modelo que genera todas las posibles entradas en estado estable para cualquier variación admisible de los parámetros. Para el caso no lineal, en [10] se extienden las ideas anteriores y se prueba que el problema de regulación no lineal se puede resolver por medio de la solución de unas ecuaciones diferenciales parciales, llamadas ecuaciones de

Francis-Isidori-Byrnes (FIB). Por otra parte, para sistemas no lineales, ha sido mostrado que la inclusión del modelo interno en la estructura del controlador es necesaria y suficiente para hacer regulación robusta [7]. La construcción del controlador dinámico, está basada en la propiedad de detectabilidad del sistema extendido, el cual está formado por el modelo del proceso y el modelo interno y su dinámica permite garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Sin embargo, si la condición de detectabilidad no se cumple, entonces es posible hacer regulación como se explica en [15]. En este trabajo se presenta una aplicación real a este algoritmo; el sistema de aplicación es el péndulo invertido giratorio el cual satisface la condición presentada en [15].

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se describen algunos aspectos básicos de la regulación robusta, mientras que en la sección 3 se presenta la aplicación. En la sección 4 se observan los resultados en simulación para el sistema y por último, en la sección 5 se mencionan las conclusiones del trabajo realizado.

II. RESULTADOS BÁSICOS DE LA REGULACIÓN ROBUSTA

Considere un sistema dinámico descrito por

$$\dot{x} = f(x, u, w, \theta) \quad (1)$$

$$\dot{w} = s(w) \quad (2)$$

$$e_1 = h_1(x, w, \theta) \quad (3)$$

donde $\theta \in R^p$ es un vector paramétrico, $u(t)$ es la señal de entrada, $x(t)$ es el estado del sistema, $w(t)$ representa el estado de un generador de señales externas, el cual provee las señales de referencia y las perturbaciones, y está descrito por (2). La ecuación (3) describe la salida del error de seguimiento definida como la diferencia entre la salida del sistema y la señal de referencia.

Para este sistema el problema de regulación robusta (RRP) consiste en encontrar un controlador dinámico

$$\dot{\xi} = \varphi(\xi, e_1) \quad (4)$$

$$u(t) = \vartheta(\xi) \quad (5)$$

tal que, para todos los valores de parámetros en una vecindad \mathcal{P} de los valores nominales, se cumple lo siguiente:

RS) El punto de equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ del sistema $\dot{x} = f(x, \vartheta(\xi), 0, \theta)$, $\dot{\xi} = \varphi(\xi, h(x, 0, \theta))$ es asintóticamente estable.

RR) La solución del sistema en lazo cerrado (1)-(2)-(4) satisface que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$.

La solución completa de este problema se presenta en [2][1]. En términos de la existencia de los mapeos no lineales $x_{ss} = \pi(w, \theta)$ y $\xi_{ss} = \sigma(w, \theta)$, que satisfacen las ecuaciones Francis-Isidori-Byrnes (FIB)

$$\frac{\partial \pi(w, \theta)}{\partial w} s(w) = f(\pi(w, \theta), \vartheta(\sigma(w, \theta)), w, \theta) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma(w, \theta)}{\partial w} s(w) = \varphi(\sigma(w, \theta), 0) \quad (7)$$

$$0 = h_1(\pi(w, \theta), w, \theta) \quad (8)$$

para todos los valores de θ permitidos. Para formular una solución de RRP se considera la aproximación lineal del sistema (1),(2),(3), (4) y (5), como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + B_0 u + P_0 w \\ \dot{w} &= S w \\ e_1 &= C_{10} x - R_{10} w \\ \dot{\xi} &= F \xi + G e_1 \\ u_{ss} &= H \xi \end{aligned}$$

Proposición 1: Suponga que se cumple lo siguiente. El par (A_0, B_0) es estabilizable. El par (C_{10}, B_0) es detectable.

Entonces, el problema de regulación robusto de salida tiene solución si para todo $\theta \in \mathcal{P}$, existen los mapeos $x_{ss} = \pi(w, \theta)$, $u_{ss} = \gamma(w, \theta)$ con $\pi(0, \theta) = 0$ y $\gamma(0, \theta) = 0$, que definidos en una vecindad del origen $(w, \theta) = (0, 0)$, satisfacen las siguientes condiciones

$$\frac{\partial \pi(w, \theta)}{\partial w} s(w) = f(\pi(w, \theta), \gamma(w, \theta), w, \theta) \quad (9)$$

$$0 = h_1(\pi(w, \theta), w, \theta) \quad (10)$$

tal que, para cada $j = 1, \dots, m$, existan un conjunto de números reales $a_0^j, a_1^j, \dots, a_{q_j-1}^j$, tal que para algún entero q_j la entrada de estado estable $\gamma_j(w, \mu)$ satisface

$$L_s^{q_j} \gamma_j(w, \theta) = a_0^j \gamma_j(w, \theta) + a_1^j L_s \gamma_j(w, \theta) + \dots + a_{q_j-1}^j L_s^{q_j-1} \gamma_j(w, \theta); \quad (11)$$

y la matriz

$$\begin{pmatrix} A_0 - \lambda I & B_0 \\ C_{10} & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

es no singular para cada λ , la cual es una raíz de cualquier polinomio $p_j(\lambda) = a_0^j + a_1^j \lambda + \dots + a_{q_j-1}^j \lambda^{q_j-1} - \lambda^{q_j}$.

Nota 2: Es importante notar que los mapeos $x_{ss} = \pi(w, \theta)$ representan la subvariedad cero de estado estable de la salida y $u_{ss} = c^a(w, \theta)$ la entrada de estado estable. Esta entrada hace invariante la subvariedad de estado estable de la salida y garantiza que el error de seguimiento es cero en esta subvariedad. La condición (11) expresa

el hecho de que esta entrada de estado estable puede ser generada, independientemente de los valores del vector de parámetros, por un sistema lineal dinámico de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \Phi \xi_2 \\ u_{ss} &= \tilde{H}_1 \xi_2, \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$\xi_2 = (\xi_2^1 \ \xi_2^2 \ \dots \ \xi_2^m)^T;$$

$$\xi_2^i = (\gamma_i(w, \theta), L_s \gamma_i(w, \theta), \dots, L_s^{q_i-1} \gamma_i(w, \theta))^T$$

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_m \end{pmatrix}; H_i^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{1 \times q_i}$$

y

$$\Phi = \text{diag}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m);$$

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^i & a_1^i & \dots & a_{q_i-1}^i \end{pmatrix}$$

Es posible mostrar que la dinámica del controlador está formada como una combinación de dos subsistemas: uno que estabiliza el sistema y otro que proporciona la entrada de estado estable cuando el sistema es forzado a evolucionar en la subvariedad cero de salida. Este controlador puede ser construido considerando la aproximación lineal del sistema no lineal nominal. Primeramente definiendo $\tilde{x} = x - \pi(w, 0)$ se tiene

$$\dot{\tilde{x}} = f(x, u, w, 0) - \frac{\partial \pi(w, 0)}{\partial w} s(w)$$

$$\dot{\tilde{x}} = f(x, u, w, 0) - f(\pi(w, 0), \gamma(w, 0), w, 0)$$

$$\dot{\tilde{x}} = A_0 \tilde{x} + B_0 u - B_0 \gamma(w, \theta) + \varphi(\tilde{x} + \pi(w, 0), w, u, 0) - \varphi(\pi(w, 0), w, \gamma(w, 0), 0) \quad (14)$$

$$\dot{\tilde{x}} = A_0 \tilde{x} + B_0 u - B_0 \gamma(w, \theta) + \tilde{f}(\tilde{x}, \pi(w, 0), w, u, 0) \quad (15)$$

donde

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \pi(w, \theta), w, u, \theta) = \varphi(\tilde{x} + \pi(w, \theta), w, u, \theta)$$

$$- \varphi(\pi(w, \theta), w, \gamma(w, \theta), \theta)$$

$$\tilde{f}(0, \pi(w, \theta), w, \gamma(w, \theta), \theta) = 0$$

dado que la entrada de estado estable $\gamma(w, \theta)$ es generada por el sistema (13), sustituyendo $\tilde{H}_1 \xi_2$ por $\gamma(w, \theta)$ en la expresión anterior, la ecuación (15) se puede escribir como

$$\dot{\tilde{x}} = A_0 \tilde{x} - B_0 \tilde{H}_1 \xi_2 + B_0 u + \tilde{f}(\tilde{x}, \pi(w, 0), w, u, 0)$$

$$\dot{\xi}_2 = \Phi \xi_2$$

$$e_1 = C_{10} \tilde{x} + \tilde{h}(\tilde{x}, w, 0)$$

donde

$$e_1 = h_1(x, w, \theta) = C_{10} x + \bar{h}(x, w, \theta)$$

$$= C_{10} \tilde{x} + \tilde{h}(\tilde{x}, w, \theta)$$

$$\tilde{h}(\tilde{x}, w, \theta) = C_{10} \pi(w, \theta) + \bar{h}(\tilde{x} + \pi(w, \theta), w, \theta)$$

y por (10) $\tilde{h}(0, w, \theta) = 0$ de esto es evidente que una condición necesaria para construir un observador es que el par

$$\left(\begin{array}{cc} C_{10} & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} A_0 & -B_0\tilde{H}_1 \\ 0 & \Phi \end{array} \right) \quad (16)$$

sea detectable. En [12] se muestra que suponiendo que el par (C_{10}, A_0) sea detectable y la condición (12) se cumple, entonces esto implica que el par (16) es detectable. Ahora por la teoría de perturbación desvaneciente un controlador robusto puede ser proporcionado por el sistema dinámico

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 + B_0K - G_1C_{10} & 0 \\ -G_2C_{10} & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$+ \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} e_1, \quad (18)$$

$$u = K\xi_1 + \tilde{H}_1\xi_2 =: H\xi \quad (19)$$

donde K y G_1, G_2 hacen a las matrices

$$A_0 + B_0K; \quad \begin{pmatrix} A_0 - G_1C_{10} & -B_0H \\ -G_2C_{10} & \Phi \end{pmatrix}$$

estables respectivamente. Efectivamente, es directo verificar que las condiciones (6), (7) y (8) son cumplidas por los mapeos $\xi_{ss} = (\sigma_1(w, \theta), \sigma_2(w, \theta))^T$, con $\sigma_1(w, \theta) = 0$ y $\sigma_2(w, \theta)^T = (\gamma_1(w, \theta) \dots L_s^{q_m-1}\gamma_m(w, \theta))$ y $x_{ss} = \pi(w, \theta)$ es la solución de las ecuaciones(9)-(10).

Por supuesto, si el par (C_{10}, A_0) no es detectable, entonces el procedimiento anterior falla y no se puede construir un regulador robusto. Entonces se supone ahora que se puede habilitar una señal adicional como salida y tal que para el sistema extendido la aproximación lineal es detectable. Se muestra en [15], como un regulador robusto puede ser diseñado considerando esta salida extendida.

Considere otra vez el sistema (1)-(2) y además suponga que existe una señal medible adicional l , llamada $y_2(t) = h_2(x, w, \theta)$, con $C_{20} = \frac{\partial h_2(x, w, \theta)}{\partial x} |_{x=0, w=0}$.

Suponga también que las ecuaciones (9)-(10) tienen solución y que para la solución de estado estable de $\psi_j(w, \theta) := h_{2,j}(\pi(w, \theta), \theta)$ es posible encontrar, para cada $j = 1, \dots, l$ un conjunto de números reales $b_0^j, b_1^j, \dots, b_{r_j-1}^j$, tal que $\psi_j(w, \theta)$ satisface una ecuación de la forma

$$L_s^{r_j}\psi_j(w, \theta) = b_0^j\psi_j(w, \theta) + b_1^jL_s\psi_j(w, \theta) + \dots + b_{r_j-1}^jL_s^{r_j-1}\psi_j(w, \theta) \quad (20)$$

tal que, procediendo con antes y definiendo como

$$\xi_3 = (\xi_3^1 \ \xi_3^2 \ \dots \ \xi_3^l)^T; \xi_3^j = (\psi_j(w, \theta), \dots, L_s^{r_j-1}\psi_j(w, \theta))^T \quad (21)$$

un nuevo sistema dinámico como $\dot{\xi}_3 = \Lambda\xi_3; \psi = \tilde{H}_2\xi_3$.

Donde

$$\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1 \ \Lambda_2 \ \dots \ \Lambda_l); \Lambda_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_0^j & b_1^j & \dots & b_{r_j-1}^j \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} H_1^2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & H_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & H_l^2 \end{pmatrix}; H_i^2 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)_{1 \times r_j}$$

entonces la salida y_2 toma la forma

$$\begin{aligned} y_2 &= h_2(x, w, \theta) = C_{20}x + \bar{h}_2(x, w, \theta) \\ &= C_{20}\tilde{x} + \psi(w, \theta) + \tilde{h}_2(\tilde{x}, w, \theta) \\ \tilde{h}_2(\tilde{x}, w, \theta) &: = C_{20}\pi(w, \theta) + \bar{h}_2(\tilde{x} + \pi(w, \theta), w, \theta) \\ &\quad - \psi(w, \theta) \\ \tilde{h}_2(0, w, \theta) &= 0 \end{aligned}$$

El sistema linealizado extendido se puede escribir ahora como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_0\tilde{x} - B\tilde{H}_1\xi_2 + B_0u \\ \dot{\xi}_2 &= \Phi\xi_2 \\ \dot{\xi}_3 &= \Lambda\xi_3 \\ e_1 &= C_{10}z \\ y_2 &= C_{20}\tilde{x} - \tilde{H}_2\xi_3, \end{aligned}$$

y basado en lo anterior una condición necesaria para la existencia del regulador robusto de dimensiones extendidas es la siguiente

H3) El par

$$\left(\begin{array}{ccc} C_{10} & 0 & 0 \\ C_{20} & 0 & -\tilde{H}_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} A_0 & -B\tilde{H}_1 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{array} \right) \quad (21)$$

es detectable.

Las condiciones de existencia para la solución del problema del regulador robusto de dimensiones extendidas, se mencionan en el siguiente teorema

Teorema 3: Considere que el sistema (1)-(2) con la salida extendida $y_e(t)^T = (e_1 \ y_2) = (h_1(x, w, \theta) \ h_2(x, w, \theta))$ y asuma que las siguientes suposiciones se cumplen. El par (A_0, B_0) es estabilizable. El par (C_e, A_0) es detectable.

Entonces el problema del regulador extendido (RRPEM) tiene solución si para toda $\theta \in \mathcal{P}$, existen los mapeos $x_{ss} = \pi(w, \theta)$, $u_{ss} = (\gamma_1(w, \theta), \dots, \gamma_m(w, \theta))^T$ con $\pi(0, \theta) = 0$ y $\gamma(0, \theta) = 0$, ambos definidos en una vecindad del origen de $(w, \theta) = (0, 0)$, satisfaciendo las condiciones (9)-(10) tal que, para cada $i = 1, \dots, m$ existan un conjunto de números reales $a_0^i, a_1^i, \dots, a_{q_i-1}^i$, tal que para la entrada de estado estable $\gamma_i(w, \theta)$ satisface

$$L_s^{q_i}\gamma_i(w, \theta) = a_0^i\gamma_i(w, \theta) + a_1^iL_s\gamma_i(w, \theta) + \dots + a_{q_i-1}^iL_s^{q_i-1}\gamma_i(w, \theta); \quad (22)$$

y la matriz (12) es no singular para cada λ , la cual es una raíz de cualquier polinomio

$$p_i(\lambda) = a_0^i + a_1^i\lambda + \dots + a_{q_i-1}^i\lambda^{q_i-1} - \lambda^{q_i}.$$

y para cada $j = 1, \dots, l$ existan un conjunto de números reales $b_0^j, b_1^j, \dots, b_{r_j-1}^j$, tal que la solución en estado estable de $\psi_j(w, \theta)$ satisfice

$$L_s^{r_j} \psi_j(w, \theta) = b_0^j \psi_j(w, \theta) + b_1^j L_s \psi_j(w, \theta) + \quad (23)$$

$$\dots + b_{r_j-1}^j L_s^{r_j-1} \psi_j(w, \theta), \quad (24)$$

y H3) se cumple.

Demostración: Se construye el controlador para el sistema extendido. En este caso el controlador tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= (A_0 + B_0 K - G_1 C_e) \xi_1 - G_1 H_e \xi_3 + G_1 y_e \\ \dot{\xi}_2 &= -G_2 C_e \xi_1 + \Phi \xi_2 - G_2 H_e \xi_3 + G_2 y_e \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= -G_3 C_e \xi_1 + (\Lambda - G_3 H_e) \xi_3 + G_3 y_e, \\ u &= K \xi_1 + \tilde{H}_1 \xi_2, \end{aligned} \quad (26)$$

donde $H_e^T = (0 \quad -\tilde{H}_2)$; $C_e^T = (C_{10} \quad C_{20})$ e $y_e^T = (h_1(x, w, \theta) \quad h_2(x, w, \theta))$ y G_1, G_2, G_3 son matrices tal que hacen que el par (21) sea estable. Para mostrar que este controlador soluciona el RRPPEM, como primer paso se muestra que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable. Para la matriz

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 K & B_0 \tilde{H}_1 & 0 \\ G_1 C_e & A_0 + B_0 K - G_1 C_e & 0 & -G_1 H_e \\ G_2 C_e & -G_2 C_e & \Phi & -G_2 H_e \\ G_3 C_e & -G_3 C_e & 0 & \Lambda - G_3 H_e \end{pmatrix}$$

asociada al sistema linealizado en lazo cerrado que es similar a la matriz

$$\begin{pmatrix} A_0 + B_0 K & B_0 K & B_0 \tilde{H}_1 & 0 \\ 0 & A_0 - G_1 C_e & -B_0 \tilde{H}_1 & -G_1 H_e \\ 0 & -G_2 C_e & \Phi & -G_2 H_e \\ 0 & -G_3 C_e & 0 & \Lambda - G_3 H_e \end{pmatrix}$$

la cual es estable, gracias a que H1, H3 se cumplen. Ahora por hipótesis existen los mapeos $x_{ss} = \pi(w, \theta)$, $u_{ss} = \gamma(w, \theta)$ solucionando (9)-(10) y tomando el mapeo $\sigma(w, \theta)$ como

$$\sigma(w, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2(w, \theta) \\ \sigma_3(w, \theta) \end{pmatrix}$$

y $\sigma_3(w, \theta)^T = (\psi_1(w, \theta) \quad \dots \quad L_s^{r_l-1} \psi_l(w, \theta))$, se verifica directamente que las ecuaciones (6), (7) y (8) se satisfacen para el sistema extendido. ■

III. APLICACIÓN

En esta sección se aplica el esquema de control propuesto en la sección anterior, a un modelo subactuado, el péndulo invertido giratorio figura (1), la ecuación de movimiento para este sistema puede ser descrita en general por la ecuación estandar para sistemas mecánicos con varios eslabones [8] $D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$. Donde $D(q)$ es la

matriz de inercias, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de coriolis, $G(q)$ son los términos gravitacionales, τ es el torque (vector de entrada) y q es el vector de coordenadas generalizadas, que puede ser particionado sin pérdida de generalidad como (q_1, q_2) , donde q_1 y q_2 representan las coordenadas generalizadas de la articulación actuada y no actuada respectivamente.

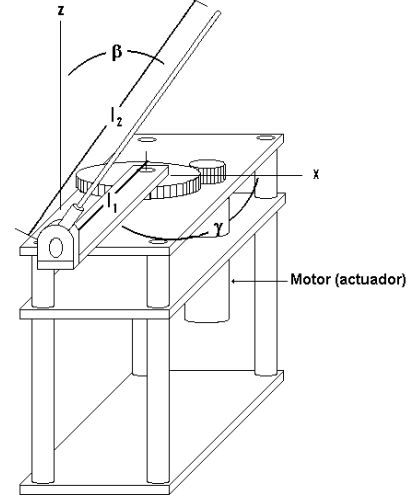


Fig. 1. Péndulo invertido giratorio.

La dinámica del péndulo invertido giratorio es

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $d_{11} = m_2 l_1^2 + J$; $d_{12} = d_{21} = m_2 l_1 l_2 \cos(\beta)$; $d_{22} = m_2 l_2^2$; $c_{11} = c_{21} = c_{22} = 0$; $c_{12} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\beta) \dot{\beta}$; $g_1 = 0$; $g_2 = -m_2 l_2 g \sin(\beta)$ y J es el momento de inercia de la base, g es la aceleración de la gravedad, l_1, γ son respectivamente la longitud y el ángulo del primer eslabon, τ_1 es el torque del motor y m_2, l_2, β son respectivamente la masa, longitud y el ángulo rotacional del péndulo.

La dinámica del motor está descrita por $\tau = P_1 v - P_2 \dot{\gamma}$ donde $P_1 = \frac{K_g K_m}{R_m}$, $P_2 = \frac{K_g^2 K_m^2}{R_m}$ y es K_g la ganancias de los engranes, K_m, R_m y v son respectivamente la ganancia, resistencia y voltaje de entrada al motor

Donde los valores de los parámetros son $m_2 = 0.50k_g$, $l_2 = 0.75m$, $l_1 = 0.12m$, $J = 0.003k_g m^2$, $k_m = 0.104N - m/amp$, $k_g = 0.055m$, $R_m = 1.9\Omega$, $g = 9.81m/s^2$. Tomando al vector de estados como $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\beta, \dot{\beta}, \gamma, \dot{\gamma})^T$, $u = v$ como la entrada de control e $y = x_1$ como la salida, la representación del sistema puede ser llevado a una forma en espacio de estado como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) &= h(x) \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_{21}(x) \\ x_4 \\ f_{41}(x) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{22} \\ 0 \\ f_{42} \end{bmatrix}, \quad h(x) = x_1$$

y

$$\begin{aligned} f_{21}(x) &= \frac{d_{21}x_2c_{12} + d_{21}(p_2x_4) - d_{11}g_2}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \\ f_{22}(x) &= \frac{-d_{21}p_1}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \\ f_{41}(x) &= \frac{-d_{22}x_2c_{12} - d_{22}(p_2x_4) + d_{12}g_2}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \\ f_{42}(x) &= \frac{d_{22}p_1}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \end{aligned}$$

La señal de referencia es senoidal $y_r(t) = R\sin(\alpha t + r)$, es decir, el exosistema puede ser tomado como $\dot{w}_1 = \alpha w_2$; $\dot{w}_2 = -\alpha w_1$ con $\alpha = 1$, $w(0) = [w_1(0) \ w_2(0)]^T$ y $e = x_1 - w_2$ como el error de seguimiento. En este caso

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 44.472 & 0 & 0 & 9.184 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -196.2 & 0 & 0 & -57.4 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -16.056 \\ 0 \\ 100.35 \end{bmatrix},$$

$$C_{10} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

cuyos eigenvalores son $\lambda_1 = -3.3379$, $\lambda_2 = -57.944$, $\lambda_3 = 3.8818$, $\lambda_4 = 0$. Por la prueba de detectabilidad de Popov-Belevich-Hautus [14], es fácil de ver que para la salida tomada, la condición de detectabilidad no se cumple. Sin embargo la posición del brazo (x_3) puede ser medida, y se toma la salida auxiliar como $y_2(t) = x_1 + x_3$, que junto con la salida original, hacen al sistema extendido detectable.

Los mapeos $x_{ss} = \pi^a(\omega, \mu)$ y $u_{ss} = c^a(\omega, \mu)$ se pueden obtener resolviendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial w} s(w) &= \pi_2(w) \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial w} s(w) &= f_{21}(w) + f_{22}(w) \\ \frac{\partial \pi_3}{\partial w} s(w) &= \pi_4(w) \\ \frac{\partial \pi_4}{\partial w} s(w) &= f_{41}(w) + f_{42}(w) \end{aligned} \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{21}(x) &= \frac{d_{21}x_2c_{12} + d_{21}(p_2x_4) - d_{11}g_2}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \\ f_{22}(x) &= \frac{-d_{21}p_1}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \\ f_{41}(x) &= \frac{-d_{22}x_2c_{12} - d_{22}(p_2x_4) + d_{12}g_2}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \\ f_{42}(x) &= \frac{d_{22}p_1}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} \end{aligned}$$

Dado que la solución de estas ecuaciones no es inmediata se propone una solución aproximada como en [11], donde se supone una solución para $\pi_3(w)$ de la forma

$$\begin{aligned} \pi_3(w) &= a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_1^2 + a_4w_1w_2 + a_5w_2^2 + a_6w_1^3 \\ &\quad + a_7w_1^2w_2 + a_8w_1w_2^2 + a_9w_2^3 + \varphi |w^4|. \end{aligned}$$

Diferenciando esta ecuación dos veces y sustituyéndola en (27) y después de realizar la expansión de los términos del lado derecho de la igualdad, es posible igualar los coeficientes de w^i para obtener un conjunto de ecuaciones para el cual se calculan los valores de a_j ($j = 1, \dots, 9$), entonces la solución de los mapeos esta dada por

$$\begin{aligned} \pi_1 &= w_2; \quad \pi_2 = -w_1 \\ \pi_3 &= -87.99w_2 - 20.25w_1^2w_2 - 23.625w_2^3 \\ \pi_4 &= 87.99w_1 + 20.25w_1^3 + 30.375w_1w_2^2 \\ c(w) &= .0249w_1^2w_2^3 + 50.3359w_1 + 2.832w_2 + 11.583w_1^3 \\ &\quad + .889w_2^5 + 1.103w_2^3 - .1494w_1^2w_2 + 17.374w_1w_2^2 \end{aligned}$$

la inmersión se calcula conforme [10] y se representa por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -225 & 0 & -259 & 0 & -35 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{H}_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El estado estable de la señal auxiliar, se obtiene al sustituir en (27) los mapeos π_1 y π_3 encontrados anteriormente donde y_{ss}^2 es $y_{ss}^2 = -86.99w_2 - 20.25w_1^2w_2 - 23.625w_2^3$ entonces las matrices Λ y \tilde{H}_2 se representan de la siguiente manera

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{H}_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz K que estabiliza la aproximación lineal del sistema se obtiene de la solución de un LQR donde

$$K = [189.55 \ 51.95 \ 3.16 \ 5.54]$$

y las matrices G_i son

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{bmatrix} 60.9251 & 16.0449 \\ -664.4824 & -477.0268 \\ 1939.0317 & 337.5588 \\ 5378.2405 & 3196.7445 \end{bmatrix} \\ G_2 &= \begin{bmatrix} 1059.9684 & 171.0182 \\ 6915.5161 & 1288.6232 \\ -5907.3886 & -540.4635 \\ -124206.0723 & -22420.9759 \\ 68556.0822 & -244.4243 \\ 2847159.6770 & 506760.9456 \end{bmatrix} \\ G_3 &= \begin{bmatrix} 2190.9486 & 413.3296 \\ -61.9959 & -13.5538 \\ -4918.0871 & -931.3808 \\ -4074.8633 & -762.2659 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Estas matrices se usan en la dinámica del controlador.

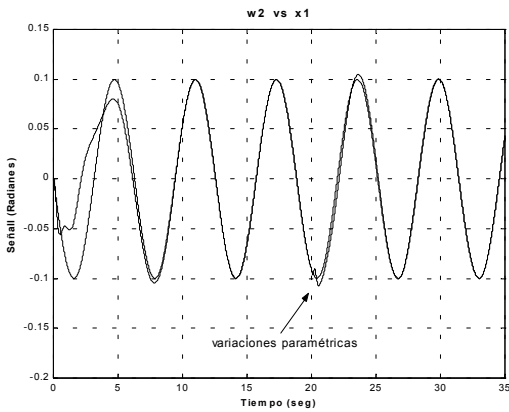


Fig. 2. Angulo del péndulo.

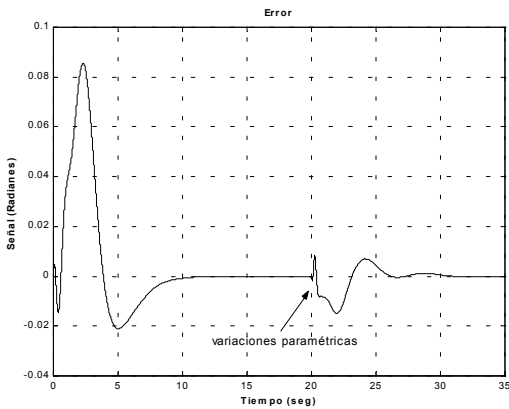


Fig. 3. Error de seguimiento.

IV. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

En todas las simulaciones se considera una condición inicial del sistema cerca del punto de equilibrio. La simulación comienza con el seguimiento de una onda senoidal para los parámetros nominales del sistema, después se presenta un cambio en los valores de los sistema en $t=20$, las variaciones de los parámetros l_2 , l_1 y m_2 son un aumento del 15% 25% y 90% respectivamente.

En la figura (2) se muestra la respuesta de la salida del sistema en lazo cerrado. Como se observa en la figura (3) el control garantiza un error de seguimiento pequeño, mientras que en la figura (4) se ve como la salida auxiliar se ajusta para forzar que el error de seguimiento converja a cero.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo, se propone un método para resolver el problema que aparece cuando algunas condiciones relacionadas con la detectabilidad de cierto par de matrices, derivadas de un sistema no lineal, no se cumplen y por lo tanto, las condiciones para la existencia de un regulador robusto no se pueden garantizar. Se presentan condiciones suficientes bajo las cuales el esquema controlador que garantiza la convergencia del error de seguimiento de salida a cero, suponiendo que es posible medir algunas sali-

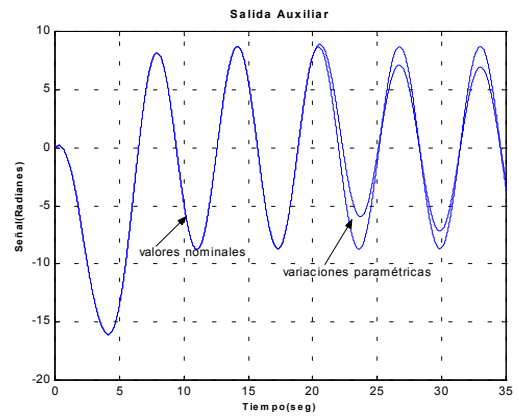


Fig. 4. Salida Auxiliar.

das auxiliares, para las cuales las condiciones anteriormente mencionadas se cumplen. Subrayamos el hecho de que diseñando un controlador robusto, considerando solo las salidas auxiliares, se garantiza que el error de seguimiento tiende a cero sólo con los parámetros nominales y no cuando se presentan variaciones en los parámetros. En este caso, el esquema propuesto permite alcanzar las metas deseadas en la dinámica del error. La efectividad del esquema propuesto se muestra mediante la aplicación a un modelo de un péndulo invertido giratorio.

REFERENCES

- [1] Isidori A., "Nonlinear Control Systems", 3th Ed., Springer Verlag, 1998.
- [2] C. I. Byrnes, F. Delli Priscoli and A. Isidori, "Output regulation of uncertain nonlinear systems, Birkhauser", 1997.
- [3] Davison E. J. and Goldenberg A. (1975), "The robust control of a general servomechanism problem: the servo compensator", Automatica, Vol. 11, pp.461-471.
- [4] Wonham, W.M. (1979). "Linear Multivariable Control: A Geometric Approach", 2nd ed. New-York: Springer-Verlag.
- [5] Francis, B.A. (1976). "The internal model principle of control theory". Automatica., Vol. 12, pp. 457-465.
- [6] Francis, B.A. (1977). "The linear multivariable regulator problem". SIAM J. Control Optimiz., Vol. 15, pp. 486-505.
- [7] J. S. A. Hepburn, W. M. Wonham (1984), "Error feedback and internal model on differentiable manifolds", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. 29, pp. 397-403.
- [8] M. W. Spong, M. Viyasagar, "Robot Dynamical and Control", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1989.
- [9] J. Huang, W. J. Rugh (1990), "On the nonlinear multivariable servomechanism problem", Automatica, 26, pp. 963-972.
- [10] Isidori A., Byrnes C.I. (1990). "Output regulation of nonlinear systems", IEEE Trans. Aut. Control, Vol 35, No.2, pp. 131-140.
- [11] B. Castillo, "Almost Tracking Through Singular Points via the Nonlinear Regulator Theory", IV Latin American Congress on Automatic Control, Puebla, México, pp. 590-594, Vol. 2, 1990.
- [12] F. Delli Priscoli and A. Isidori, "Robust Tracking for a class on nonlinear systems", Proc. 1st European Control Conference, Grenoble, France pp. 1814-1818, 1991.
- [13] Khalil Hassan K. (1994). "Robust servomechanism output feedback controllers for feedback linearizable systems". Automatica. 30, pp. 1587-1599.
- [14] Hans W. Knobloch, Alberto Isidori, Dietrich Flockerzi, "Topics in Control Theory", Birkhauser Verlag 1993, Basel Boston Berlin.
- [15] G. Obregón-Pulido, B. Castillo-Toledo and S. Čelikovský "Robust Regulation for a class of Dynamical Systems", Proc 3th Conference on Robust Control Desing (ROCOND) by IFAC. July 2000, Prague.