

Dinámica de un sistema planar de 2 GL con Cuaterniones.

Dr. Méndez Canseco Mauricio Cirilo
mmendez@ds.uas.mx; h1sim@yahoo.com

Universidad Anáhuac del Sur.
 Av. De las Torres 131, col. Olivar de los Padres,
 Del. Álvaro Obregón, México, D.F., CP01780
 Tel 01 (55) 56 28 88 00 ext. 225

M. en I. Gudiño Lau Jorge
jglau@verona.fi-p.unam.mx

Sección de Eléctrica, DEPEFI.
 Universidad Nacional Autónoma de México,
 Apdo. Postal 70-256, México, D.F., 04510
 Tel.:+525556223013, Fax:+525556161073

Resumen

En este artículo se presenta la aplicación de los Cuaterniones para el cálculo de la dinámica de un sistema de cuerpos rígidos de dos GL. El trabajo pretende mostrar la metodología de utilizar los Cuaterniones sin requerir de otra metodología de modelación. Esta metodología permite visualizar de manera natural la física involucrada en las ecuaciones de movimiento y presenta una alternativa de modelación que es fácilmente asimilable. En el desarrollo del trabajo se presenta los aspectos básicos de los Cuaterniones, haciendo referencia con las rotaciones y la simplificación que se ha logrado en la determinación de las ecuaciones cinemáticas de un sistema de n cuerpos rígidos. Después se muestra la manera de implementar los Cuaterniones en la modelación dinámica partiendo del principio de Euler-Lagrange..

1. Introducción

El trabajo presenta la metodología de modelación cinemática con el álgebra de Cuaterniones \mathbf{Q} desarrollada en [1][2] y optimizada en [3]. La optimización de las ecuaciones de velocidad y aceleración logra expresar sus componentes en términos de los escalares de velocidad y aceleración angular y las orientaciones de sus respectivos ejes de giro, como es de esperarse.

Es importante mostrar la forma de usar los Cuaterniones en la cinemática para comprender su aplicación a la dinámica. Por lo que, el primer tema trata algunas definiciones básicas de los mismos.

2. Aspectos básicos del Álgebra de Cuaterniones

Sea el conjunto \mathfrak{R}^4 , sobre el cual se define las operaciones siguientes:

i). Una operación aditiva, $\oplus: \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ definida por:

$$(a,b,c,d) \oplus (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, d+\delta) \quad (1)$$

ii). Una operación multiplicativa, $*: \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ definida por:

$$(a,b,c,d) * (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha) \quad (2)$$

$$\forall (a,b,c,d), (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{R}^4,$$

Por medio de las cuales la pareja (\mathfrak{R}^4, \oplus) y $(\mathfrak{R}^4, *)$, forman un grupo aditivo conmutativo y un grupo multiplicativo no conmutativo respectivamente.

Se presentan también en [1] los siguientes isomorfismos, apropiados para las aplicaciones, entre el espacio vectorial de Cuaterniones, el espacio vectorial real y el espacio vectorial \mathfrak{R}^3 , esto sirve para expresar un Cuaternión como la suma de un Cuaternión real y un Cuaternión vectorial. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_r &= \{(a,0,0,0): a \in \mathfrak{R}\} \subset \mathbf{Q}, \\ \mathbf{Q}_v &= \{(0,b,c,d): b,c,d \in \mathfrak{R}\} \subset \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (3)$$

Entonces, las transformaciones definidas por:

$$\begin{aligned} T_r(a,0,0,0) &= a \quad \forall (a,0,0,0) \in \mathbf{Q}_r \\ T_v(0,b,c,d) &= (b,c,d) \quad \forall (0,b,c,d) \in \mathbf{Q}_v \end{aligned} \quad (4)$$

son isomórficas, por lo tanto, si $\mathbf{p}=(a,b,c,d) \in \mathbf{Q}$, entonces:

$$\mathbf{p} = T_r^{-1}(a) \oplus T_v^{-1}(b, c, d) \quad (5)$$

De manera similar al álgebra de los números complejos, un Cuaternión $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ tiene un conjugado definido por:

$$\bar{\mathbf{p}} = (p_0, -p_1, -p_2, -p_3), \quad (6)$$

2.1 Representación paramétrica de rotaciones de un cuerpo rígido.

Existe una transformación lineal $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$, donde $\mathbf{p} \in \mathbf{Q}$ está fijo, y preserva el producto interno, la norma y el ángulo:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} * \mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \bullet (\mathbf{p} * \mathbf{q} * \bar{\mathbf{p}}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \quad (7)$$

Donde:

$*$: $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ es la operación multiplicativa de los Cuaterniones.

$\|\bullet\|$: $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{R}^+$ es la norma en espacio vectorial \mathbf{Q} .

\bullet es la multiplicación escalar.

$\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{Q}$ es el conjugado de \mathbf{p} .

La cual es una rotación en el espacio vectorial de los Cuaterniones según se muestra en [1].

Los componentes de $\mathbf{p} \in \mathbf{Q}$ están relacionados con los parámetros físicos de la rotación, mediante las siguientes expresiones:

$$p_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \mathbf{p}_v = \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{w}_v \quad (8)$$

θ es el ángulo de rotación

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ es el eje de rotación

Si $\mathbf{p} \in \mathbf{Q}$ es un Cuaternión unitario, entonces la rotación $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ se simplifica a la siguiente forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} * \mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p} * \mathbf{q} * \bar{\mathbf{p}} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \quad (9)$$

3. Aplicación al modelado cinemático.

Antes de mostrar las ecuaciones cinemáticas para n cuerpos, ejemplificaremos el caso de dos cuerpos acoplados.

Todos los desarrollos de los resultados aquí mostrados se encuentran a detalle en [2].

El modelado consiste en determinar a través de los eslabones el vector de posición \mathbf{L}_{T2} del extremo final de los cuerpos acoplados a la base global considerando el movimiento de cada eslabón y

los efectos que tiene cada uno de ellos en los cuerpos siguientes (Fig. 1):

$$\mathbf{L}_{T2}(t) = T_v[\mathbf{P}_1(t) * T_v^{-1}[\mathbf{l}_1] * \bar{\mathbf{P}}_1(t) + \mathbf{P}_2(t) * \mathbf{P}_1(t) * T_v^{-1}[\mathbf{l}_2] * \overline{\mathbf{P}_2(t) * \mathbf{P}_1(t)}] \quad (10)$$

Siendo \mathbf{l}_1 y \mathbf{l}_2 son los vectores que representan a los dos cuerpos en la posición en la que se determinó el modelo.

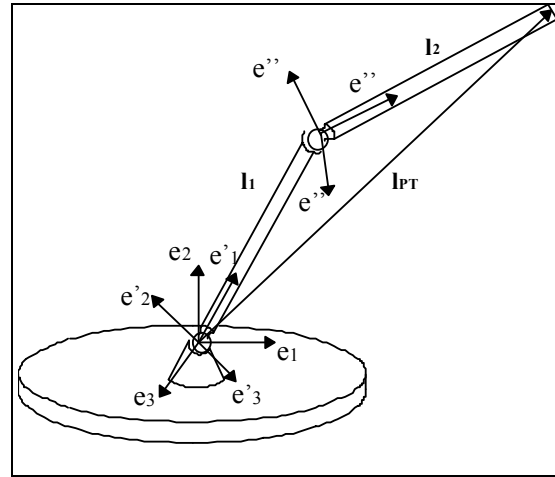


Figura 1. Sistemas de referencia.

Donde el Cuaternión $\mathbf{P}_1(t)$ es la rotación del primer cuerpo y está constituido por:

$$\mathbf{P}_1(t) = (P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}) \text{ y}$$

$$P_{10} = \cos \frac{f_1(t)}{2}, \quad \mathbf{P}_v(t) = \sin \frac{f_1(t)}{2} \mathbf{ur}_1 \quad (11)$$

El eje de rotación \mathbf{ur}_1 está definido respecto a la base global.

El Cuaternión $\mathbf{P}_2(t)$ es la rotación del segundo cuerpo formado por:

$$\mathbf{P}_2(t) = (P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}) \text{ y}$$

$$\mathbf{P}_{20}(t) = \cos \frac{f_2(t)}{2}, \quad \mathbf{Q}_v(t) = \sin \frac{f_2(t)}{2} \mathbf{ur}_2 \quad (12)$$

El vector \mathbf{ur}_2 es el eje de rotación del segundo cuerpo definido en el sistema global y es afectado por la rotación $\mathbf{P}_1(t)$.

$$\mathbf{ur}_2 = T_v[\rho(\mathbf{P}_1(t), T_v^{-1}[\mathbf{u}_2])] \quad (13)$$

La velocidad la obtenemos al derivar la ecuación de posición y simplificar utilizando las propiedades mencionadas, hasta obtener:

$$\dot{\mathbf{L}}_{T2}(t) = f_1(t) \mathbf{u}_{r1} \times \mathbf{L}_1(t) + f_2(t) \mathbf{u}_{r2} \times \mathbf{L}_2(t) + f_1(t) \mathbf{u}_{r1} \times \mathbf{L}_2(t) \quad (14)$$

Donde: $\mathbf{u}_{r1} = \mathbf{u}_1$

Los términos \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son los ejes de rotación definidos respecto a la base global antes de que cualquier movimiento se efectúe. Cuando el acoplamiento se mueve los ejes de rotación son afectados por el movimiento y esto se indica con los Cuaterniones que definen dicho movimiento; Así, los ejes definidos en cada instante son \mathbf{u}_{r1} y \mathbf{u}_{r2} .

La velocidad puede escribirse de la siguiente forma [1]:

$$\dot{\mathbf{L}}_{T2}(t) = \mathbf{w}_1(t) \times \mathbf{L}_1(t) + \mathbf{w}_2(t) \times \mathbf{L}_2(t) + \mathbf{w}_1(t) \times \mathbf{L}_2(t) \quad (15)$$

Donde: $\mathbf{w}_1(t) = f_1(t) \mathbf{u}_{r1}$
 $\mathbf{w}_2(t) = f_2(t) \mathbf{u}_{r2}$

Y la aceleración está dada por:

$$\ddot{\mathbf{L}}_{T2}(t) = \alpha_1(t) \times \mathbf{L}_1(t) + \mathbf{w}_1(t) \times [\mathbf{w}_1(t) \times \mathbf{L}_1(t)] + \alpha_2(t) \times \mathbf{L}_2(t) + \mathbf{w}_2(t) \times [\mathbf{w}_2(t) \times \mathbf{L}_2(t)] + \alpha_1(t) \times \mathbf{L}_2(t) + \mathbf{w}_1(t) \times [\mathbf{w}_1(t) \times \mathbf{L}_2(t)] + 2 \mathbf{w}_1(t) \times [\mathbf{w}_2(t) \times \mathbf{L}_2(t)] \quad (16)$$

Donde:

$\mathbf{w}_1(t) = f_1'(t) \mathbf{u}_{r1}$ es la velocidad angular en $\mathbf{L}_1(t)$.

$\alpha_1(t) = f_1''(t) \mathbf{u}_{r1}$ es la aceleración angular en $\mathbf{L}_1(t)$.

$\mathbf{w}_2(t) = f_2'(t) \mathbf{u}_{r2}$ es la velocidad angular en $\mathbf{L}_2(t)$.

$\alpha_2(t) = f_2''(t) \mathbf{u}_{r2}$ es la aceleración angular en $\mathbf{L}_2(t)$.

Todo expresado respecto a la base global.

4. Cinemática de n cuerpos rígidos

De acuerdo a la Fig. 2. se muestra el algoritmo desarrollado en [3][4] para calcular las ecuaciones cinemática de n cuerpos rígidos.

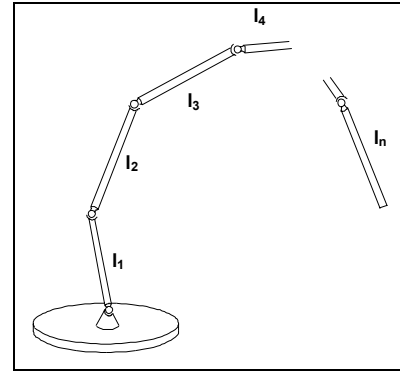


Fig. 2. Sistema de n cuerpos acoplados.

La ecuación de posición, velocidad y aceleración para n cuerpos acoplados son:

Posición \mathbf{L}_{Tn} del extremo final del sistema de n cuerpos rígidos.

$$\mathbf{L}_{Tn} = \sum_{m=1}^n \mathbf{L}_m \quad (17)$$

Donde:

$$\mathbf{L}_m = \prod_{i=1}^m \mathbf{P}_i(t) * \mathbf{l}_m * \prod_{i=1}^m \mathbf{P}_i(t) = T_v [\rho(\prod_{i=1}^m \mathbf{P}_i(t), \mathbf{l}_m)]$$

y

$$\prod_{i=1}^m \mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_m(t) * \mathbf{P}_{m-1}(t) * \dots * \mathbf{P}_1(t)$$

Velocidad.

$$\mathbf{V}_{Tn} = \sum_{m=1}^n \dot{\mathbf{L}}_m = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i \times \mathbf{L}_m \quad (18)$$

Donde:

$$\mathbf{w}_m = f_m'(t) T_v [\rho(\prod_{i=1}^{m-1} \mathbf{P}_i(t), \mathbf{u}_m)]$$

y \mathbf{u}_m es el eje de rotación del elemento \mathbf{L}_m .

Aceleración.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{Tn} &= \sum_{m=1}^n \ddot{\mathbf{L}}_m \\ &= \sum_{m=1}^n [\sum_{i=1}^m (\alpha_i \times \mathbf{L}_m + \mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_i \times \mathbf{L}_m) + \\ &\quad 2 \sum_{k=1}^m \sum_{i=1+k}^m (\mathbf{w}_k \times \mathbf{w}_i \times \mathbf{L}_m)] \end{aligned} \quad (19)$$

Donde:

$$\alpha_m = f_m''(t) T_v [\rho(\prod_{i=1}^{m-1} \mathbf{P}_i(t), \mathbf{u}_m)]$$

Este algoritmo sistematiza el cálculo de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración de n cuerpos acoplados de forma simplificada.

5. Dinámica

Como es conocido de la función de energía de Lagrange [5] definida por:

$$L(q, \dot{q}, t) = K(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (19)$$

se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange al derivarlas de la forma:

$$F_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} \quad (20)$$

lo que implica determinar la energía cinética y potencial de cada componente del sistema a analizar, respecto al sistema de referencia global.

5.1 Energía Cinética de un cuerpo rígido.

El procedimiento a seguir esta basado en calcular la energía cinética de cada cuerpo del sistema desde el sistema de referencia global, debido a que la información involucrada es directamente obtenida con la cinemática mostrada en el tema anterior.

La energía cinética de un objeto está formada por su energía de traslación y rotación, de acuerdo con [6]:

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^T \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (21)$$

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^T \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \omega_x^2 I_{Gx} + \frac{1}{2} \omega_y^2 I_{Gy} + \frac{1}{2} \omega_z^2 I_{Gz} - \omega_x \omega_y I_{Gxy} - \omega_x \omega_z I_{Gxz} - \omega_y \omega_z I_{Gyz}$$

Donde \mathbf{v}_G es la velocidad del centro de masa, \mathbf{I} es la matriz de inercia y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo.

El cálculo de los momentos y productos de inercia al sistema global están basados en la teoría clásica de la dinámica para calcular el momento de inercia respecto a un eje \mathbf{x}_1 , que tiene orientación $\mathbf{u}_1 = (u_x, u_y, u_z)$ respecto al sistema x-y-z mostrado en la Fig. 3.

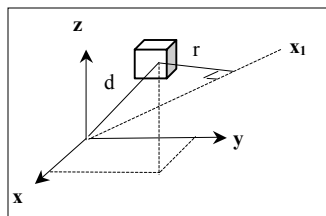


Fig. 3. Sistema de n cuerpos acoplados.

El momento y un producto de inercia respecto a \mathbf{x}_1 son:

$$I_{x1} = I_x u_x^2 + I_y u_y^2 + I_z u_z^2 - 2 I_{xy} u_x u_y - 2 I_{yz} u_y u_z - 2 I_{zx} u_z u_x \quad (22)$$

$$I_{xy1} = -I_x u_x v_x - I_y u_y v_y - I_z u_z v_z + I_{xy} (u_x u_y + u_y v_x) + I_{yz} (u_y u_z + u_z v_y) + I_{zx} (u_z u_x + u_x v_z)$$

Considerando que el eje \mathbf{y}_1 tiene una orientación $\mathbf{y}_1 = (v_x, v_y, v_z)$, respecto al sistema x-y-z.

Definamos la función $Mg(\mathbf{P}_{mn}, \mathbf{I}_n, \mathbf{L}_{Tng}, m_n)$ que va a calcular los momentos y productos de inercia $\mathbf{I}_n = (I_{xn}, I_{yn}, I_{zn}, I_{xyn}, I_{yzn}, I_{xzn})$ del sistema (x-y-z)_n al sistema (x-y-z)_m a través de calcular los vectores $\mathbf{u}_{nm}, \mathbf{v}_{nm}, \mathbf{w}_{nm}$, transformando las direcciones $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n$, con la siguiente operación, utilizando el Cuaternión \mathbf{P}_{mn} que realiza el cambio de bases entre sistemas.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{nm} &= T_v [\rho(\mathbf{P}_{mn}, \mathbf{u}_n)] = T_v \left[\rho \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{P}_i(t), \mathbf{u}_n \right) \right] \\ \mathbf{v}_{nm} &= T_v [\rho(\mathbf{P}_{mn}, \mathbf{v}_n)] \\ \mathbf{w}_{nm} &= T_v [\rho(\mathbf{P}_{mn}, \mathbf{w}_n)] \end{aligned} \quad (23)$$

Con este principio se puede calcular la inercia medida en un sistema de referencia local situado en centro de masa del cuerpo al sistema de referencia global al considerar el teorema de ejes paralelos.

De acuerdo con el cálculo de los momentos y productos de inercia a cualquier base se puede establecer la función de energía cinética $K(\mathbf{v}_{ng}, \boldsymbol{\omega}_n, Mg(\mathbf{P}_{n0}, \mathbf{I}_n, \mathbf{L}_{Tng}, m_n))$ de un cuerpo n al sistema de referencia global x-y-z.

$$\begin{aligned} K(\mathbf{v}_{ng}, \boldsymbol{\omega}_n, Mg(\mathbf{P}_{n0}, \mathbf{I}_n, \mathbf{L}_{Tng}, m_n)) &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{ng}^T \mathbf{v}_{ng} + \\ &\frac{1}{2} \omega_{xn0}^2 I_{Gxn0} + \frac{1}{2} \omega_{yn0}^2 I_{Gyn0} + \frac{1}{2} \omega_{zn0}^2 I_{Gzn0} \\ &- \omega_{xn0} \omega_{yn0} I_{Gxyn0} - \omega_{xn0} \omega_{zn0} I_{Gxzn0} - \omega_{yn0} \omega_{zn0} I_{Gyzn0} \end{aligned} \quad (24)$$

donde:

\mathbf{v}_{ng} es la velocidad del centro de masa.

$\boldsymbol{\omega}_n$ es la velocidad angular del cuerpo n.

$Mg(\mathbf{P}_{n0}, \mathbf{I}_n, \mathbf{L}_{Tng}, m_n)$ son los momentos y productos de inercia del cuerpo n calculados al sistema de referencia global.

$Mg(\mathbf{P}_{n0}, \mathbf{I}_n, \mathbf{L}_{Tng}, m_n) = (I_{Gxn0}, I_{Gyn0}, I_{Gzn0}, I_{Gxyn0}, I_{Gyzn0}, I_{Gxzn0})$
 Estos términos se calculan de acuerdo a lo planteado en la cinemática de sistemas de cuerpos rígidos con Cuaterniones.

5.2 Energía potencial.

La energía potencial V de cada cuerpo se determina en función de masa, vector gravedad y su posición respecto al sistema de referencia global de acuerdo a:

$$V_n = m_n \mathbf{L}_{Tng} \cdot \mathbf{G} \quad (25)$$

5.3 Dinámica de un sistema 2GL.

Consideremos el sistema 2GL mostrado en la Fig. 4. de dos barras l1 y l2 de longitud cuyo centros de masa están localizados a una distancia lc1 y lc2 de su sistema local de referencia.

Los Cuaterniones que definen las rotaciones en cada articulación localmente son \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 . Y definidos al sistema global son \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 , esto implica que es una rotación vista desde el sistema de referencia $(x-y-z)_2$,

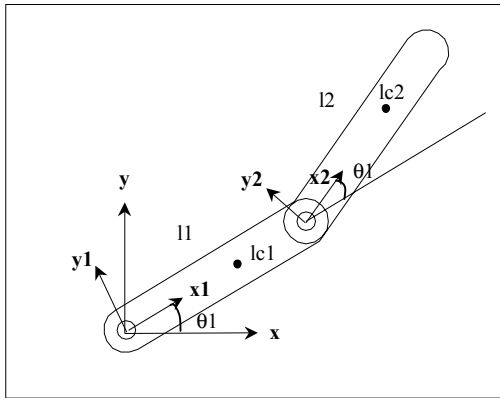


Fig. 4. Sistema de n cuerpos acoplados.

La posición de los centros de masa de la barra 1 y 2 se calculan de la siguiente manera:

$$\mathbf{L}_{1g} = lc1 T_v [\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{u}_1)]$$

$$\mathbf{L}_{2g} = l1 T_v [\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{u}_1)] + lc2 T_v [\rho(\mathbf{P}_2 * \mathbf{P}_1, \mathbf{u}_1)]$$

Las velocidades de los centros de masa son:

$$\mathbf{v}_{1g} = \theta'_1(t) lc1 T_v [\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{w}_3)] = \theta'_1(t) lc1 \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{v}_{2g} = \theta'_1(t) l1 T_v [\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{w}_3)] + (\theta'_1(t) + \theta'_2(t)) lc2 T_v [\rho(\mathbf{P}_2 * \mathbf{P}_1, \mathbf{w}_3)]$$

$$= \theta'_1(t) l1 \mathbf{w}_1 + (\theta'_1(t) + \theta'_2(t)) lc2 \mathbf{w}_1$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \theta''_1(t) \mathbf{w}_1$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \theta''_2(t) \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{I}_{r1} = (I_{xx1}, I_{yy1}, I_{zz1}, I_{xy1}, I_{yz1}, I_{xz1})$$

$$\mathbf{I}_{r2} = (I_{xx2}, I_{yy2}, I_{zz2}, I_{xy2}, I_{yz2}, I_{xz2})$$

$$\mathbf{I}_{10} = Mg(\mathbf{P}_1, \mathbf{I}_{r1}, \mathbf{L}_{1g}, m_1)$$

$$\mathbf{I}_{20} = Mg(\mathbf{P}_2 * \mathbf{P}_1, \mathbf{I}_{r2}, \mathbf{L}_{2g}, m_2) \quad (26)$$

Con la información anterior se puede determinar la función de energía de nuestro sistema:

$$L = K(\mathbf{v}_{1g}, \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{I}_{10}) + K(\mathbf{v}_{2g}, \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{I}_{20}) - m_1 \mathbf{L}_{1g} \cdot \mathbf{G} - m_2 \mathbf{L}_{2g} \cdot \mathbf{G} \quad (27)$$

Por lo tanto, el modelo dinámico es determinado de acuerdo a:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta}, t)}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta}, t)}{\partial \theta_i}$$

En la actualidad un software matemático puede calcular estas derivadas sin ningún problema. Pero de acuerdo a los principios mencionados es posible calcular la matriz $\mathbf{D}(\theta)$ definida en el modelo dinámico resultante de ordenar los términos de aceleración y velocidad angular.

$$\tau_i = \mathbf{D}(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + g(\theta) \quad (28)$$

Se está trabajando en la sistematización del cálculo directo de la matriz $\mathbf{D}(\theta)$ y $C(\theta, \dot{\theta})$. Los resultados de nuestros desarrollos nos muestran la posibilidad de implementar dicha sistematización.

6 Conclusiones

La primera conclusión es que el álgebra de Cuaterniones \mathbf{Q} simplifica la metodología de modelación cinemática y dinámica, debido a que sus propiedades quedan totalmente claras; y de esta manera la utilización y construcción de las rotaciones se realizan sistemáticamente. Además está comprobado que el número de operaciones al efectuar una rotación es menor al realizado con otros métodos. Esto reduce el tiempo de cálculo, lo que es muy útil en la solución de los modelos y sus animaciones.

Este trabajo es el inicio de una investigación para sistematizar el cálculo del modelo dinámico de sistemas de cuerpos rígidos. La investigación se puede extender al área de control y en diversas áreas del diseño. Un área de mi interés es la simulación de cuerpos por computadora en donde se puede aprovechar la generalidad del álgebra para implementarla y realizar menos cálculos.

Referencias

- [1] Reyes L. "*Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies*".
Partie 1: Le Cadre Theorique.
Partie 2: Quelques Applications.
Rapport de Recherche Inria - Rocquencourt, France 1990.
- [2] Méndez M "*Modelado cinemático de sistemas mecánicos de cadena cerrada*". Tesis de maestría en ingeniería, DEPMI, UNAM. agosto 1995.
- [3] Méndez M. "Dinámica de cuerpos rígidos con Quaterniones: una aplicación a los mecanismos". Tesis de Doctorado en ingeniería, Universidad Anáhuac del Sur 2000.
- [4] Méndez M. "Simplificación del Modelado Cinemática de n cuerpos rígidos con Quaterniones". Tesis de Doctorado en ingeniería, Universidad Anáhuac del Sur 2000.
- [5] Spong, Mark- Vidyasagar. "Robot Dynamics and Control". Editorial John Wiley & Sons 1989.
- [6] Riley Willian. "Dinámica". Editorial Reverté 1996.