

CONTROL POR CAMPO DE VELOCIDAD MEDIANTE ESTRUCTURA PD+ CON COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN¹

Rafael Kelly, José Navarrete y Rubén Hernández

*División de Física Aplicada, CICESE,
Apdo. Postal 2615, Adm. 1
Ensenada, B.C., 22800
MEXICO
e-mail: rkelly@cicese.mx
fax: +52 (646) 175-05-54*

Resumen: En este artículo se trata el problema de control por campo de velocidad en espacio operacional de robots manipuladores. Se supone que la fricción en las articulaciones del robot es descrita a través del modelo de Dahl. La estructura de control propuesta se ha inspirado del control PD+ originalmente formulado para control de movimiento en coordenada articulares. También el controlador incorpora un observador no lineal para la deflexión promedio de las cerdas del modelo de fricción. Los resultados experimentales llevados a cabo en un brazo mecánico de transmisión directa de dos grados de libertad muestran resultados satisfactorios.

Palabras clave: Control de robots, Campo de velocidad, Fricción, Estabilidad, Robot de transmisión directa.

1. INTRODUCCIÓN

La filosofía de control por campo de velocidad pasivo ha sido propuesta por Li y Horowitz (2001a, 2002b) intentando ser una alternativa al control de movimiento para robots manipuladores. En la formulación del control por campo de velocidad pero sin restricción de pasividad, diversos planteamientos han sido recientemente abordados por ejemplo en Moreno y Kelly (2002), Cervantes *et al.* (2002).

En el enfoque de control por campo de velocidad la tarea a ser llevada a cabo por el robot es codificada por medio de campo de velocidad deseado. Un campo de velocidad define un vector tangente (la velocidad desada $\dot{\mathbf{y}}_d$ del elemento final) en cada punto \mathbf{y} del espacio de configuración operacional. La figura 1 muestra un ejemplo de la especificación de movimiento por medio de un campo de velocidad. En esta figura se presenta un campo de velocidad definido en el espacio operacional de un robot de dos grados de libertad que asigna un vector velocidad a cada punto del espacio operacional. Las líneas de flujo mostradas en la figura 1 indican que éstas tienden a un contorno circular.

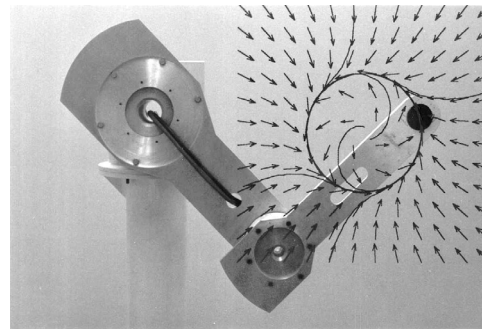


Figura 1. Campo de velocidad deseado en espacio cartesiano

La formulación del problema de control por campo de velocidad (Moreno y Kelly (2002)) consiste en diseñar una ley de control para determinar la acción de control $\boldsymbol{\tau}$ de modo que el error de campo de velocidad, definido como la diferencia entre el campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ y la velocidad del elemento final del robot $\dot{\mathbf{y}}$, tienda a cero en forma asintótica, es decir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{y}(t)) - \dot{\mathbf{y}}(t)] = \mathbf{0}. \quad (1)$$

En esta situación, el campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ es definido de modo que la velocidad $\dot{\mathbf{y}}$ de la salida sea igual a $\mathbf{v}(\mathbf{y})$, es decir que $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$. Siendo

¹ Trabajo parcialmente apoyado por CONACYT, México.

así, la salida del robot es guiada hacia el contorno deseado. En este sentido se dice que un campo de velocidad codifica una tarea de movimiento para el manipulador. Así, en lugar de requerir que el extremo final del manipulador se encuentre en una postura determinada a un tiempo dado, como es impuesto en control de movimiento, en el control por campo de velocidad la postura del elemento final será guiada por las líneas de flujo del campo de velocidad deseado, tal como es observado en la figura 1.

2. MODELOS DINÁMICO Y CINEMÁTICO DE ROBOTS

La dinámica de un robot de n eslabones seriales con articulaciones rotacionales puede ser descrito como

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

que es una ecuación diferencial no lineal en el estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$, en donde $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ llamada de *inercia*, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times n$ llamada de *fuerzas centrífugas y de Coriolis*, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de $n \times 1$ llamado de *pares y fuerzas gravitacionales* y $\boldsymbol{\tau}$ es un vector de $n \times 1$ llamado de *fuerzas externas*, siendo este último los pares y fuerzas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

En la ecuación (2), $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}})$ es un vector de $n \times 1$ que representa los pares de fricción, siendo el modelo de Dahl (1976) el seleccionado en este trabajo. Siguiendo la notación de Moreno y Kelly (2003), dicho modelo de fricción —incorporando fricción viscosa— puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{z}} = -\Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{z} + \dot{\mathbf{q}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}) = F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \mathbf{z}, \quad (4)$$

donde $\Sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0_1}, \dots, \sigma_{0_n}\}$ es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de rigidez de cada articulación, $\Psi(\dot{\mathbf{q}}) = \text{diag}\left\{\frac{1}{f_{C_1}}|\dot{q}_1|, \dots, \frac{1}{f_{C_n}}|\dot{q}_n|\right\}$ es una matriz diagonal semidefinida positiva en la cual f_{C_i} representa el coeficiente de fricción de Coulomb para cada articulación, $F_v = \text{diag}\{f_{v_1}, \dots, f_{v_n}\}$ es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa para cada articulación y $\mathbf{z} = [z_1 \ \dots \ z_n]^T$ es el estado interno del modelo de fricción de Dahl (4) el cual no es medible.

Si denotamos a $\mathbf{h}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como la cinemática directa, esto es, la relación entre el espacio de configuración articular y el espacio de

configuración operacional, entonces la posición y orientación $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ del elemento final es dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q}). \quad (5)$$

La derivada temporal del modelo cinemático directo (5) dá el modelo cinemático diferencial

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{d}{dt}\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

donde $J(\mathbf{q})$ es una matriz llamada jacobiano analítico (Canudas de Wit *et al.*, 1996).

El estudio presentado en este documento se basa en las siguientes hipótesis:

- Robots no redundantes, i.e. $n = m$.
- El jacobiano del robot $J(\mathbf{q})$ es de rango pleno y además es acotado, i.e.

$$\|J(\mathbf{q})\| \leq k_J \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

donde k_J es una constante estrictamente positiva.

3. CONTROL POR CAMPO DE VELOCIDAD

En esta sección se propone un controlador por campo de velocidad inspirado del control PD+ originalmente propuesto por Koditschek (1984) para resolver el control de movimiento en coordenadas articulares.

El controlador por campo de velocidad propuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) & \left[J(\mathbf{q})^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{d}{dt} [J(\mathbf{q})^{-1}] \mathbf{v}(\mathbf{y}) \right] \\ & + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [J(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{y})] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ & + K [J(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{y}) - \dot{\mathbf{q}}] + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde K es una matriz simétrica y definida positiva, y $\hat{\mathbf{z}}$ es una estimación del estado interno \mathbf{z} del modelo de fricción (3)–(4). Se supone que la matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ empleada en el controlador ha sido determinada a partir de los símbolos de Christoffel.

El observador del estado interno \mathbf{z} que se propone viene dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = -\Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{z}} + K_0 [J(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{y}) - \dot{\mathbf{q}}] + \dot{\mathbf{q}}, \quad (9)$$

donde K_0 es una matriz diagonal definida positiva llamada ganancia del observador. Ahora conviene definir la variable auxiliar $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ como

$$\boldsymbol{\xi} = J(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{y}) - \dot{\mathbf{q}}, \quad (10)$$

y el error de observación del estado interno \mathbf{z} como $\tilde{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$.

La ecuación de malla cerrada resulta al sustituir el controlador (8) en el modelo del robot (2), y usar las ecuaciones del modelo de fricción (3) y del observador (9). De esta forma se obtiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\mathbf{q})^{-1} [-C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\xi} - K\boldsymbol{\xi} - \Sigma_0\tilde{\mathbf{z}}] \\ -\Sigma_0\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} + K_0\boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$$

donde la ecuación de malla cerrada es no lineal, no autónoma y tiene como un equilibrio al origen del espacio de estado. Se puede demostrar estabilidad del origen del espacio de estado por medio de la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T M(\mathbf{q})\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \tilde{\mathbf{z}}.$$

En virtud de que la matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ha sido determinada a partir de los símbolos de Christoffel, se puede usar la propiedad de establece (Canudas de Wit *et al.*, 1996)

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$$

resultando así que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias de la ecuación de malla cerrada toma la forma

$$\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\mathbf{z}}) = -\boldsymbol{\xi}^T K \boldsymbol{\xi} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0^2 K_0^{-1} \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}}. \quad (11)$$

En vista de que $\Sigma_0^2 K_0^{-1} \Psi(\dot{\mathbf{q}})$ es semidefinida positiva, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es semidefinida negativa lo que demuestra estabilidad del origen del espacio de estado.

Por otro lado también se desprende que $\boldsymbol{\xi}, \tilde{\mathbf{z}} \in L_\infty$. Suponiendo que el campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ es acotado, por definición (10), la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ también es acotada. Con esta información, de la ecuación de malla cerrada resulta que $\dot{\boldsymbol{\xi}} \in L_\infty$. Como además, de (11) se demuestra que $\boldsymbol{\xi} \in L_2$, entonces se llega a la conclusión que $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}$ y debido a la hipótesis de acotamiento del jacobiano del robot también es cierto que $\lim_{t \rightarrow \infty} J(\mathbf{q})\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0}$. De (10) y (6) resulta que esto último es equivalente a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{y}(t)) - \dot{\mathbf{y}}(t)] = \mathbf{0},$$

por lo que se ha demostrado cumplimiento del objetivo de control por campo de velocidad.

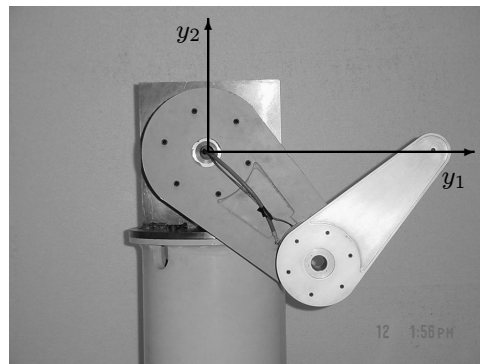


Figura 2. Brazo robótico

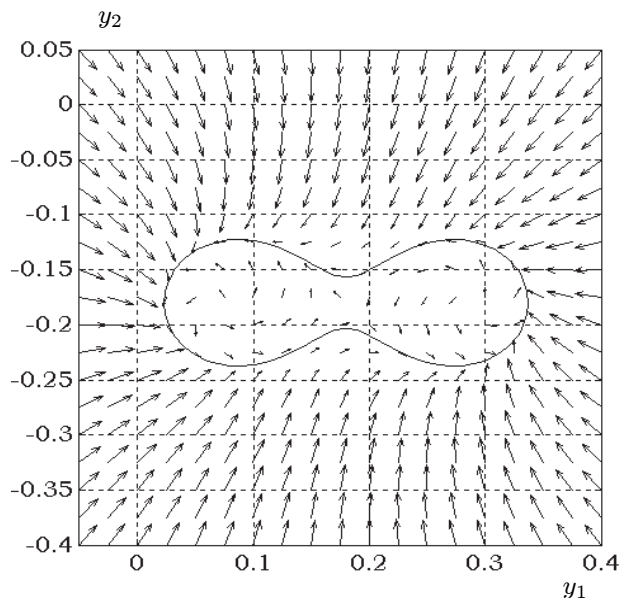


Figura 3. Campo de velocidad usado en experimentos

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La figura 2 muestra el robot usado en las implementaciones del control por campo de velocidad. El modelo dinámico de dicho mecanismo se describe en Moreno y Kelly (2003), y el cinemático es presentado en el apéndice.

4.1 Campo de velocidad deseado

En los experimentos se ha considerado un campo de velocidad que codifica la tarea de trazar un óvalo de Cassini a velocidad constante en el espacio cartesiano. El campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ propuesto genera líneas de flujo convergentes al óvalo en el plano y_1 - y_2 como se muestra en la figura 3. La rapidez deseada en el óvalo es de $v_0 = 0.35$ [m/seg].

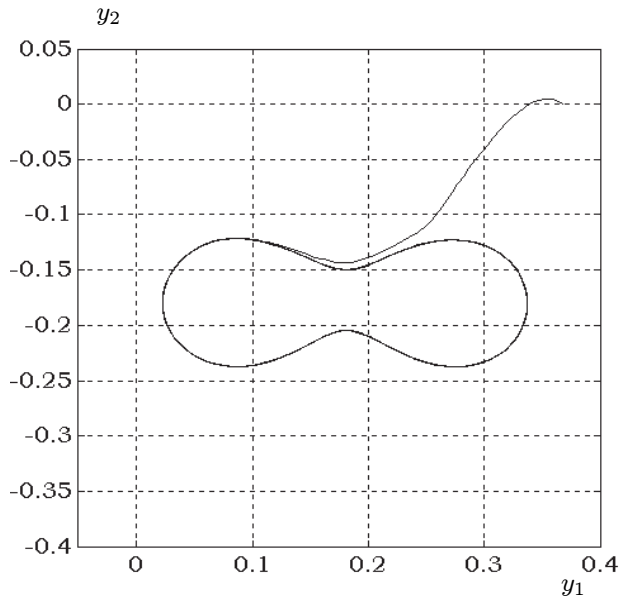


Figura 4. Trayectoria del extremo del robot en el espacio cartesiano.

4.2 Experimentos

Los resultados experimentales se presentan en las figuras 4 a 7. En particular, la figura 4 muestra la evolución temporal del extremo del brazo mecánico en el plano cartesiano. Se aprecia claramente el trazado de una trayectoria que tiende asintóticamente al óvalo de Cassini.

Las figuras 5 y 6, corresponden a los componentes del error de campo de velocidad en las coordenadas y_1 y y_2 respectivamente. Ambas curvas permanecen acotadas en valores cercanos a cero.

Finalmente, la figura 7 muestra la rapidez del extremo del brazo cuyo valor presenta ligeras oscilaciones alrededor del valor deseado de 0.35 [m/seg].

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una solución al problema de control por campo de velocidad que consiste en una estructura de control inspirada en la filosofía del control PD+ empleado en control de movimiento en coordenadas articulares. El controlador incorpora un observador para compensar fricción de Dahl. Los resultados experimentales permitieron validar el controlador propuesto con prestaciones aceptables.

APÉNDICE: MODELO CINEMÁTICO

El origen del plano cartesiano está en el eje de rotación de la primera articulación (hombro),

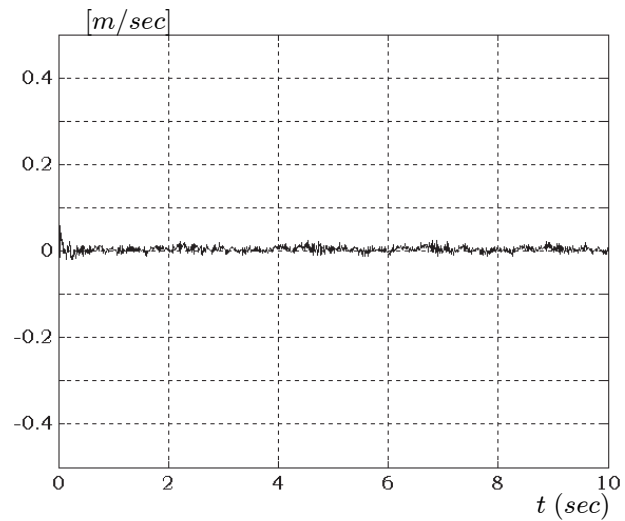


Figura 5. Error de campo de velocidad que corresponde al eje cartesiano y_1 .

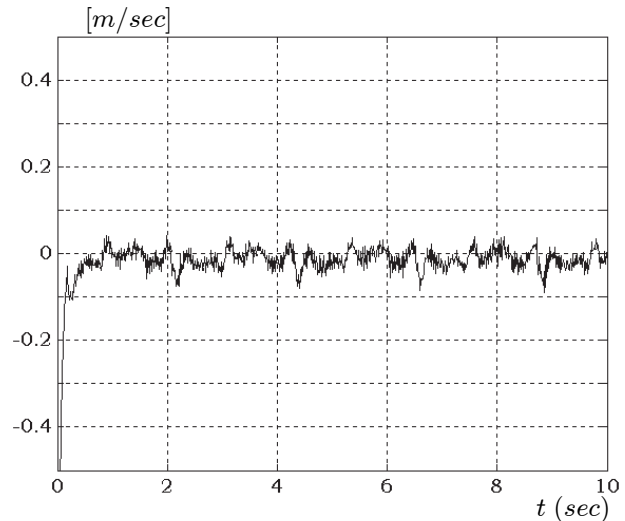


Figura 6. Error de campo de velocidad que corresponde al eje cartesiano y_2 .

donde y_1 denota el eje horizontal y y_2 denota el eje vertical. De esta forma se obtiene el modelo cinemático siguiente:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0.26 \sin(q_1) + 0.26 \sin(q_1 + q_2) \\ -0.26 \cos(q_1) - 0.26 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

El jacobiano analítico $J(\mathbf{q})$ puede calcularse usando la ecuación (6).

REFERENCIAS

- Canudas C., Siciliano B., Bastin G. (Eds.) (1996). *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, London, U.K.
- Cervantes I., Kelly R., Alvarez-Ramirez J., y J. Moreno (2002). A robust velocity field control, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, **10**, pp. 888-894.

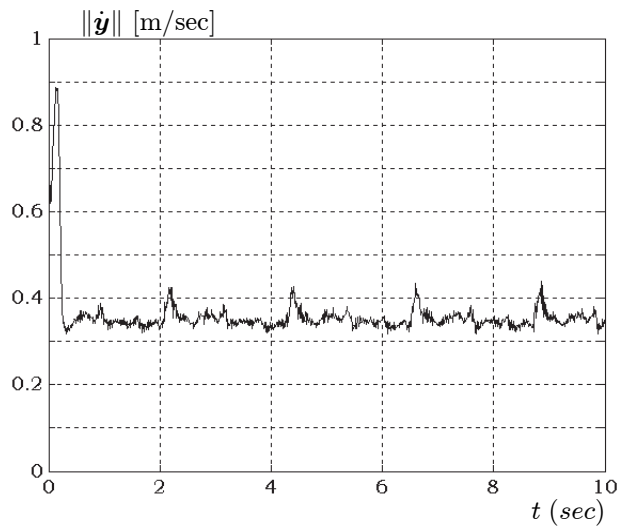


Figura 7. Norma de la velocidad del extremo del robot.

Dahl P.R. (1976). Solid friction damping of mechanical vibrations, *AIAA Journal*, **14**, pp. 1675–1682.

Koditschek D. (1984). Natural motion for robot arms. In *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, December, pp. 733–735.

Li P.Y. y R. Horowitz (2001a). Passive velocity field control (PVFC): Part I—Geometry and robustness, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **46**, pp. 1346–1359.

Li P.Y. y R. Horowitz (2001b). Passive velocity field control (PVFC): Part II—Application to contour following, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **46**, pp. 1360–1371.

Moreno J. y R. Kelly (2002). On manipulator control via velocity fields, In *15TH IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, July 22 – 26.

Moreno J. y R. Kelly (2003). Manipulator velocity control using friction compensation. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, Vol. 150, No. 2, pp. 119–126.