Un Método de Control Basado en Pasividad para la Grúa de Transporte

Jesús Aureliano Esquivel Cárdenas
Universidad Autónoma de Coahuila
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Barranquilla s/n, Col. Guadalupe, c.p. 25750
Monclova, Coahuila, México
Tel. (866)6353846
Fax. (866)6351564
Email: jaureliano@netscape.net

Abstract— **Este artículo está basado en el trabajo de Collado et. al. [5] el cual propone una ley de control basada en pasividad para la grúa de transporte; tal control es proporcional a la posición de la grúa y a su velocidad (le llamaremos control PD) y es independiente del ángulo de la carga y de su velocidad. El resultado propuesto es simplemente hacer que la ley de control dependa de todo el estado lo cual se logra con la inserción de un integrador.**

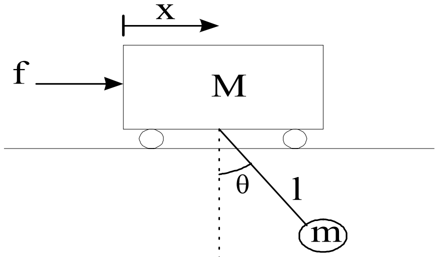
Keywords— **Pasividad, Lyapunov, LaSalle**

I. Introducción

El problema de control tratado en este artículo es el de estabilizar una grúa de transporte con la menor oscilación posible en la carga, igual al problema tratado por Collado et. al. [3]. Se tomará al sistema con más grados de libertad que variables de control, esto es, la única señal de control será la fuerza en línea con el movimiento de la grúa y no se asumirá ninguna señal de torque para influir directamente en la carga. El resultado propuesto en este artículo es una ley de control que pertenece a un conjunto de funciones con dominio en todo el estado cuya única restricción es que éstas deben de desvanecerse cuando el estado tienda al origen; esto con la finalidad de utilizar el principio de invariación de LaSalle y garantizar la estabilidad asintótica. Para lograr lo anterior se ha propuesto incrementar la dinámica con un integrador de un factor múltiplo de la velocidad de desplazamiento.

II. Modelo

Considere la grúa de transporte mostrada en el siguiente esquema



Esquema básico

Las características de la grúa son las siguientes: M representa la masa del carro, m la masa de la carga, se ignorará el peso del péndulo, θ el ángulo del péndulo con el semieje vertical inferior (asumiendo un sistema de coordenadas con origen sobre el carro de la grúa) y l la longitud constante del péndulo. El modelo simplificado del sistema es dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \tag{1}$$

con

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} x & \theta \end{bmatrix}^T, \\ \tau &= \begin{bmatrix} f & 0 \end{bmatrix}^T \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 0 & mgl\sin\theta \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} M+m & -ml\cos\theta \\ -ml\cos\theta & ml^2 \end{bmatrix} \\ C(q,\dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & ml\sin\theta\,\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si asumimos que f es la entrada y $\dot{x}$ es la salida entonces el sistema es pasivo. Esta propiedad es utilizada para garantizar la estabilidad del sistema retroalimentado.

III. Pasividad

Lo siguiente es un resultado estandard de pasividad de sistemas mecánicos donde la salida es la velocidad del estado.

La energía del sistema, i.e., la suma de la energía cinética de dos masas y la energía potencial del péndulo es dado por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + P(q) \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + mgl(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} + mgl\sin\theta \\ &= \dot{q}^T\left(M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{M}(q)\dot{q}\right) + \dot{q}^T G(q) \end{aligned}$$

donde $\dot{q}^T G(q) = mgl\sin\theta$. Despejamos $M(q)\ddot{q}$ de (1) para obtener

$$\dot{E} = \dot{q}^T\left(-C\dot{q} - G + \tau + \frac{1}{2}\dot{M}(q)\dot{q}\right) + \dot{q}^T G(q)$$

como

$$\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}ml\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \frac{1}{2}ml\sin\theta\,\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica, esto es $\dot{q}^T\left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q,\dot{q})\right)\dot{q} = 0$ para todo $\dot{q} \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{q}^T(-G(q) + \tau) + \dot{q}^T G(q) \\ &= -\dot{q}^T G(q) + \dot{q}^T\tau + \dot{q}^T G(q) \\ &= \dot{q}^T\tau \\ &= \dot{q}^T f \end{aligned}$$

y mediante el teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x} f d\tau &= E(t) - E(0) \\ &\geq -E(0) \end{aligned}$$

lo cual es la definición de pasividad para el caso en el que f es la entrada y $\dot{x}$ sea la salida.

IV. Ley de Control

Para derivar la ley de control haremos uso de la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(q,\dot{q},y) = \frac{k_E}{2}E(q,\dot{q}) + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2$$

donde k_E,k_x y k_y son constantes estrictamente positivas. La función candidata de Lyapunov es definida positiva si existe la restricción de que $\theta \in [0, 2\pi)$, si obtenemos la derivada de $V(q,\dot{q},y)$ obtenemos

$$\dot{V} = k_E\dot{x}f + k_x x\dot{x} + k_y y\dot{y}$$

si definimos $\dot{y} = \dot{x}\eta(q,\dot{q},y)$ con la única condición de que

$$\lim_{\|q,\dot{q},y\|\to 0} \eta(q,\dot{q},y) / \|q,\dot{q},y\| = 0 \tag{2}$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_E\dot{x}f + k_x x\dot{x} + k_y y\dot{x}\eta(q,\dot{q},y) \\ &= \dot{x}(k_E f + k_x x + k_y y\eta(q,\dot{q},y)) \end{aligned}$$

y si definimos la variable de fuerza f como

$$f \triangleq -\frac{1}{k_E}(k_x x + \gamma\dot{x} + k_y y\eta(q,\dot{q},y))$$

garantiza que $\dot{V} = -\gamma\dot{x}$ la cual es negativa semidefinida, por lo tanto el sistema en lazo cerrado es estable. Es inmediata la demostración de que el sistema es asintóticamente estable si seguimos los pasos del Teorema 1 en [3] el cual está basado en el principio de invariación de LaSalle y aplicamos la condición (2). Si $\dot{x} \to 0$ entonces $x \to a$, $y \to b$ y $\eta(q,\dot{q},y) \to c$ donde las constantes a, b y c pueden ser diferentes de cero por lo que

$$f \to -\frac{1}{k_E}(k_x a + k_y bc) \neq 0$$

lo cual conduce a una contradicción, ver [5]. Entonces $x \to 0$ lo cual significa que $q \to 0$. Si aplicamos la condición (2) obtenemos que $f \to 0$.

De la dinámica del sistema obtenemos

$$M^{-1}(q) = \frac{1}{\det(M(q))}\begin{bmatrix} ml^2 & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & M+m \end{bmatrix}$$

donde $\det(M(q)) = ml^2\left(M + m\sin^2\theta\right)$. Despejamos la aceleración de las variables los cual nos da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(M(q))}\begin{bmatrix} ml^2 & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & M+m \end{bmatrix} \\ &\quad \times\left\{-\begin{bmatrix} ml\sin\theta\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ mgl\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

despejamos a la aceleración de desplazamiento

$$\ddot{x} = \frac{1}{M + m\sin^2\theta}\left[-m\sin\theta\left(l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right) + f\right]$$

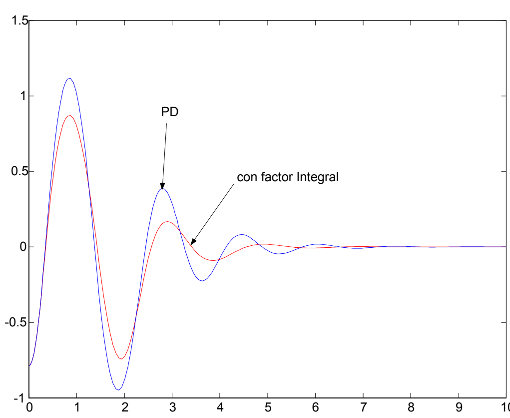
la cual tiende a cero debido a que $q = \left(\theta, \dot{\theta}\right) \to 0$ y $f \to 0$. Algo semejante ocurre con la aceleración de θ,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{M + m\sin^2\theta}[-\sin\theta((M+m)g \\ &\quad + ml\cos\theta\dot{\theta}^2) + \cos\theta\ f] \end{aligned}$$

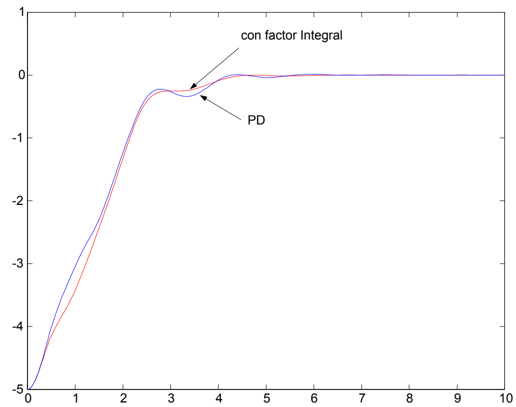
la cual tiende también a cero. Esto confirma que $q \to 0$. Además con la condición (2) garantizamos que $\|q,\dot{q},y\| \to 0$ Por lo tanto como el único valor que hace cero a $\dot{V}(q)$ es el origen, entonces el principio de invariación de LaSalle nos indica que el sistema es asintóticamente estable.

V. Simulación

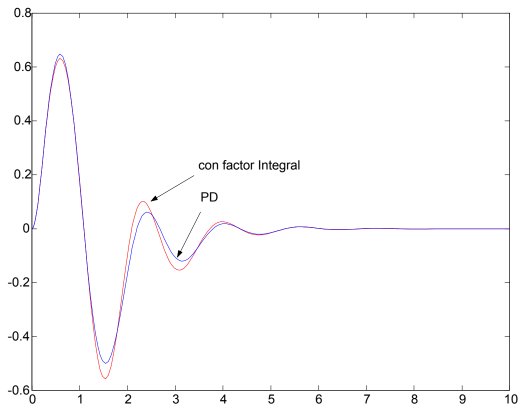
Las simulaciones fueron realizadas usando Matlab con los siguientes valores en los parámetros: $M = 1$, $m = 1$, $l = 1$, $g = 9.8$, $k_E = 1$, $k_x = 3$ and $\gamma = 4.3$. Los valores fueron escogidos idénticos a los utilizados en [3] con la finalidad de obtener una comparación confiable. Se utilizó la función $\eta(q,\dot{q},y) = \theta - \dot{\theta}$ para obtener los siguientes resultados



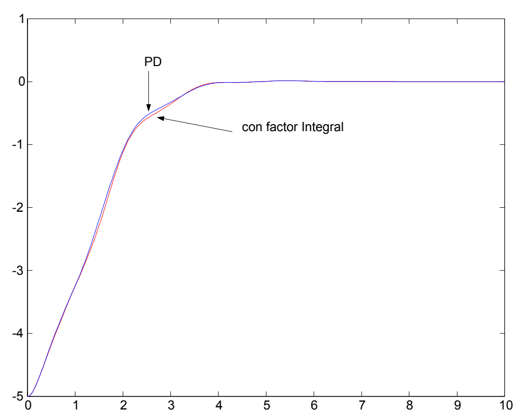
Angulo. Condición inicial: $[-5, 0, -\pi/4, 0]$



Desplazamiento. Condición Inicial: $[-5, 0, -\pi/4, 0]$



Angulo. Condición Inicial: $[-5, 0, 0, 0]$



Desplazamiento. Condición Inicial: $[-5, 0, 0, 0]$

VI. Conclusiones

Se ha obtenido una ley de control para la grúa de transporte basada en pasividad la cual podemos asociarla a un conjunto de funciones en el cual además de garantizar la estabilidad asintótica pudieramos establecer resolver algún criterio de desempeño como sería tal vez minimizar la energía cinética debido a la carga que en cierta forma es equivalente a la minimización de oscilaciones.

References

[1] V.I.Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2^{nd} Ed. Springer- Graduate Texts in Mathematics 1989.
[2] K.J. Åström and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control," in IFAC, Vol.13, San Francisco 1996.
[3] J. Collado, R. Lozano and I. Fantoni. Control of convey-crane based on Passivity. ACC June 2000, Chicago, IIlinois, USA. pp. 1260-1264.
[4] J.P.LaSalle and S. Lefschetz. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. New York: Academic. 1961.
[5] R. Lozano and I. Fantoni, "Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit," Accepted to Systems and Control Letters, 2000.
[6] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson and H. Sira-Ramírez. Passivity-based control of Euler-Lagrange Systems. Springer-Verlag, barlin, Communications and control Engineering. Sept. 1998.
[7] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke and G. Escobar. Stabilization of port-controlled hamiltonian systems: Energy-balancing and passivation. IEEE Conf. Dec. and Control, Phoenix, AZ, USA. Dec. 1999, pp. 1646-1650.
[8] M. Takegaki and S. Arimoto. A new feedback method for dynamic control of manipulators, ASME J. Dyn. Syst. meas. Contr. Vol. 102, pp. 119-125, 1981.
[9] A.J., van der Schaft. L_2–Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. Springer-Verlag, Berlin 1999.