

CONTROL INTELIGENTE JERARQUICO CON MODOS DESLIZANTES¹

Bernardo Rincón Márquez, Alexander G. Loukianov and Edgar N. Sanchez

CINVESTAV IPN Unidad Guadalajara,
 Apartado Postal 31-438, Guadalajara, Jal. 44550, México.
 e mails: [brincon \[louk, sanchez\]@gdl.cinvestav.mx](mailto:brincon [louk, sanchez]@gdl.cinvestav.mx)

Palabras claves: modo deslizante, sistema no lineal, rechazo de perturbaciones, control difuso.

Resumen: En este trabajo, se presenta un método de control robusto basado en las técnicas del modo deslizante y lógica difusa. Combina el control jerárquico con altas ganancias con la lógica difusa para diseñar un control discontinuo para sistemas multivariabiles no lineales; para eliminar el castañeteo en presencia de perturbaciones. Se presentan resultados de simulación para ilustrar la pertinencia del método.

1. INTRODUCCIÓN

Una técnica simple y adecuada para el control robusto es la del control con modo [11, 12], dado que está compuesta de dos pasos claros: el primero es la selección de la superficie deslizante, tal que la ecuación del modo deslizante en esta superficie es robusta en presencia de perturbaciones, y el segundo es el diseño de un control discontinuo que estabiliza la proyección del movimiento del sistema de lazo cerrado en el subespacio de la superficie deslizante.

Se sabe que el movimiento del modo deslizante es invariante respecto a las perturbaciones que satisfacen la condición de apareamiento ("matching condition") [2]. Existen dos casos para sistemas controlados que no satisfacen la condición de apareamiento: cuando las perturbaciones se miden, y, cuando no se pueden medir. Para el segundo caso, el problema puede resolverse usando control de alta ganancia, pero puede producir castañeteo [12] debido a defectos en los dispositivos de control.

En este artículo proponemos un nuevo esquema de control que usa la combinación de las técnicas del control con modo deslizante, control por bloques [11] y control con lógica difusa [4] para eliminar el castañeteo en el sistema de lazo cerrado para perturbaciones desconocidas tanto las que satisfacen como las que no satisfacen la condición de apareamiento. El control con modo deslizante y lógica difusa con perturbaciones que satisfacen la condición de apareamiento ha sido investigado en [1, 7, 8, 9, 10, 13].

2. MÉTODO DE CONTROL

Considere un sistema no lineal sujeto a perturbaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u + \mathbf{g}(\mathbf{x}, w) \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ es el vector de estados, u es la entrada de control, y es la salida, w representa una perturbación externa que es desconocida pero acotada, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ son funciones suficientemente suaves y acotadas, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, w)$ es una función desconocida pero acotada, y $\mathbf{f}(0) = 0$.

Supongamos que el sistema (1) puede escribirse en la llamada Forma Controlable a Bloques con perturbaciones [6]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + b_1(x_1)x_2 + g_1(x_1, w) \\ \dot{x}_i &= f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + b_i(\bar{\mathbf{x}}_i)x_{i+1} + g_i(\bar{\mathbf{x}}_i, w), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f_n(\mathbf{x}) + b_n(\mathbf{x})u + g_n(\mathbf{x}, w) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2)$$

donde $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_i)^T$; $f_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$, $g_i(\bar{\mathbf{x}}_i, w)$ y $b_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$ son funciones desconocidas pero acotadas y $b_i(\bar{\mathbf{x}}_i) > 0$.

Si la perturbación w , satisface la condición de apareamiento [2], entonces $g_1(x_1, w) = 0$ y $g_i(\bar{\mathbf{x}}_i, w) = 0$, $i = 2, \dots, n-1$ en (2), y por consiguiente, el movimiento del modo deslizante es invariante respecto a las perturbaciones. El objetivo de este trabajo es diseñar un control discontinuo libre de castañeteo, y proporcionar robustez al sistema de lazo cerrado para perturbaciones que no satisfacen la condición de apareamiento. En este caso $g_i(\bar{\mathbf{x}}_i, w) \neq 0$, $i = 2, \dots, n-1$.

Supongamos que se requiere que la salida y siga a la señal de referencia r . Usando la técnica de separación de movimientos [3], introducimos la siguiente transformación recursiva:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - r \\ z_2 &= x_2 + k_1 z_1 \\ z_i &= x_i + k_{i-1} z_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ es una nueva variable vectorial.

La transformación (3) reduce el sistema (2) a la siguiente forma:

¹Trabajo apoyado por CONACYT, bajo convenio 36960A.

$$\dot{z}_1 = -k_1 \bar{b}_1(z_1, r) z_1 + \bar{b}_1(z_1, r) z_2 + \bar{g}_1(z_1, r, w) \quad (4a)$$

$$\dot{z}_i = -k_i \bar{b}_i(\bar{z}_{i-1}, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, r) z_i + \bar{b}_i(\bar{z}_{i-1}, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, r) z_{i+1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, r, w) \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4b)$$

$$\dot{z}_n = \bar{b}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r) u + \bar{g}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r, w) \quad (4c)$$

donde $\bar{z}_i = (z_1, \dots, z_i)^T$, y , $\bar{g}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r, w)$ es una función continua y acotada, $\bar{\mathbf{k}}_{i-1} = (k_1, \dots, k_{i-1})$ y $\bar{b}_i(\bar{z}_{i-1}, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, r) = b_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$, con $k_i > 0$.

Una selección natural de la función de conmutación es $s = z_n$ (3) para generar el modo deslizante en (4a)-(4c). Entonces la dinámica deseada del sistema de lazo cerrado para el caso de w desconocida, puede seleccionarse como

$$\dot{s} = -k_n \text{sign}(s) + \bar{g}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r, w), \quad k_n > 0 \quad (5)$$

De (4c) y (5) una estrategia de control discontinuo puede obtenerse como:

$$u = k_n \bar{b}_n^{-1}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r) \text{sign}(s) \quad (6)$$

Para derivar la condición de estabilidad, usamos una función definida positiva $V(s) = \frac{1}{2} s^2$. Entonces de

$$\dot{V} \leq -[k_n - \bar{g}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r, w)] |s|$$

obtenemos

$$k_n > |\bar{g}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r, w)| \quad (7)$$

Bajo esta condición, el estado converge a la superficie $s = 0$ y el movimiento de modo deslizante ocurre en esta superficie en un tiempo finito. Este movimiento se describe por el siguiente sistema de orden $n-1$:

$$\dot{z}_1 = -k_1 \bar{b}_1(z_1, r) z_1 + \bar{b}_1(z_1, r) z_2 + \bar{g}_1(z_1, r, w) \quad (8a)$$

$$\dot{z}_i = -k_i \bar{b}_i(\bar{z}_{i-1}, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, r) z_i + \bar{b}_i(\bar{z}_{i-1}, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, r) z_{i+1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, r, w) \quad i = 2, \dots, n-2 \quad (8b)$$

$$\dot{z}_{n-1} = -k_{n-1} \bar{b}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r) z_{n-1} + \bar{g}_n(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{k}}_{n-1}, r, w) \quad (8c)$$

Mostraremos que la convergencia del sistema reducido (8a)-(8c) está definida por los valores de los coeficientes k_i , $i = 1, \dots, n-1$. Establecemos entonces, la siguiente suposición sobre las cotas de los términos desconocidos en (2):

A1) Existen constantes positivas \bar{q}_{ij} y \bar{d}_i tal que en (2)

$$|\bar{g}_1(x_1, w)| \leq \bar{q}_{11} |x_1| + \bar{d}_1 \quad (9a)$$

$$|\bar{g}_2(\bar{x}_2, w)| \leq \bar{q}_{21} |x_1| + \bar{q}_{22} |x_2| + \bar{d}_2 \quad (9b)$$

$$|\bar{g}_3(\bar{x}_3, w)| \leq \bar{q}_{31} |x_1| + \bar{q}_{32} |x_2| + \bar{q}_{33} |x_3| + \bar{d}_3 \quad (9c)$$

$$|\bar{g}_i(\bar{x}_i, w)| \leq \sum_{j=1}^i \bar{q}_{ij} |x_j| + \bar{d}_i, \quad i = 4, \dots, n-1. \quad (9d)$$

A2) Existen constantes positivas \bar{h}_i tal que en (2), la función $b_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$ satisface

$$|b_i(\bar{\mathbf{x}}_i)| \leq h_i$$

Usando la transformación (3) el sistema (2) puede describirse como (4a)-(4c). También podemos establecer la siguiente suposición sobre las cotas de los términos desconocidos en (4a)-(4c):

A3) Existen constantes positivas q_{ij} y d_i tal que:

$$|\bar{g}_1(z_1, w)| \leq q_{11} |z_1| + d_1 \quad (10a)$$

$$|\bar{g}_2(\bar{z}_2, k_1, w)| \leq q_{21} k_1^2 |z_1| + q_{22} k_1 |z_2| + d_2 \quad (10b)$$

$$|\bar{g}_3(\bar{z}_3, \bar{\mathbf{k}}_2, w)| \leq q_{31} k_1^2 k_2 |z_1| + q_{32} k_2^2 |z_2| + q_{33} k_2 |z_3| + d_3 \quad (10c)$$

$$|\bar{g}_4(\bar{z}_4, \bar{\mathbf{k}}_3, w)| \leq q_{41} k_1^2 k_2 k_3 |z_1| + q_{42} k_2^2 k_3 |z_2| + q_{43} k_3^2 |z_3| + q_{44} k_3 |z_4| + d_4 \quad (10d)$$

$$|\bar{g}_i(\bar{z}_i, \bar{\mathbf{k}}_{i-1}, w)| \leq \sum_{j=1}^{i-1} q_{ij} k_j^2 \left(\prod_{p=j+1}^{i-1} k_p \right) |z_j| + q_{ii} k_{i-1} |z_i| + d_i, \quad i = 5, \dots, n-1. \quad (10e)$$

A4) Existen constantes positivas h_i tal que:

$$\begin{aligned} |\bar{b}_1(z_1, r)| &\leq h_1 \\ |\bar{b}_2(\bar{z}_2, r)| &\leq k_1 h_2 \\ |\bar{b}_i(\bar{z}_i, r)| &\leq k_{i-1} h_i, \quad i = 3, \dots, n \end{aligned}$$

Las ganancias del controlador k_1, \dots, k_{n-1} tienen que elegirse de modo jerárquico desde la mas pequeña hasta la mas grande para alcanzar la robustez respecto a perturbaciones desconocido pero acotadas. Así, dado que $\bar{g}_1(z_1, w)$ en (10a) no depende de k_1 , el valor de este coeficiente puede escogerse tan alto que el término en (8a) sea dominante. Por el procedimiento de linealización por bloques, el término $\bar{g}_2(\bar{z}_2, k_1, w)$ en (10b) depende de k_1 pero no k_2, \dots, k_{r-1} . Entonces, fijando k_1 , la selección apropiada del valor de k_2 proporciona la dominancia del término $k_2 z_2$ en el segundo bloque de (8b), y así sucesivamente.

Para establecer la jerarquía requerida de las ganancias del control que aseguren la estabilidad del movimiento de modo deslizante (8a)-(8c), elegimos una función candidata de Lyapunov V para el sistema (8a)-(8c) como la suma de funciones candidatas de Lyapunov para cada uno de los bloques de (8a)-(8c), esto es

$$V = \sum_{i=1}^{r-1} V_i, \quad V_i = \frac{1}{2} z_i^2, \quad i = 1, \dots, n-1$$

y calcula las derivadas \dot{V}_i , $i = 1, \dots, r-1$ paso a paso desde el primero hasta el último bloque de (8a)-(8c).

En el primer paso, diferenciando la función candidata de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2} z_1^2$ en las trayectorias (8a) y usando la suposición A1 (9a), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -k_1 \bar{b}_1(z_1, r) z_1^2 + \bar{b}_1(z_1, r) z_1 z_2 + z_1 \bar{g}_1(z_1, r, w) \\ &\leq -|z_1| \left[(k_1 \bar{b}_1(z_1, r) - q_{11}) |z_1| - |\bar{b}_1(z_1, r)| |z_2| - d_1 \right] \\ \dot{V}_1 &\leq -|z_1| \left[(k_1 h_1 - q_{11}) |z_1| - h_1 |z_2| - d_1 \right] \end{aligned}$$

qué es negativa en la región $|z_1| > \frac{h_1}{k_1 h_1 - q_{11}} |z_2| + \frac{d_1}{k_1 h_1 - q_{11}}$.

Por lo tanto, el estado finalmente entra en el dominio del subespacio (z_1, z_2) , definido por

$$|z_1| \leq \bar{\alpha}_{12} |z_2| + \beta_{12}, \quad (11)$$

donde los parámetros α_{12} y β_{12} definidos como

$\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12} h_1$, $\alpha_{12} = (k_1 h_1 - q_{11})^{-1}$ y $\beta_{12} = \alpha_{12} d_1$ son positivos si se mantiene la siguiente condición:

$$k_1 > h_1^{-1} q_{11} \quad (12)$$

En el segundo paso, siguiendo pasos similares a los del primer bloque, la derivada \dot{V}_2 de la función candidata de Lyapunov $V_2 = \frac{1}{2}z_2^2$, calculada en las trayectorias de (8b), bajo las condiciones (10a), (10b) y (12), esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -k_2\bar{b}_2(z_1, k_1, r)z_2^2 + \bar{b}_2(z_1, k_1, r)z_2z_3 + z_2\bar{g}_2(\bar{z}_2, k_1, r, w) \\ \dot{V}_2 &\leq -|z_2| \left[-q_{21}k_1^2|z_1| + (k_2|\bar{b}_2(z_1, k_1, r)| - q_{22}k_1)|z_2| \right. \\ &\quad \left. - |\bar{b}_2(z_1, k_1, r)||z_3| - d_2 \right] \\ \dot{V}_2 &\leq -|z_2| \left[-q_{21}k_1^2|z_1| + (k_2k_1h_2 - q_{22}k_1)|z_2| - k_1h_2|z_3| - d_2 \right] \\ \dot{V}_2 &\leq -|z_2| \left[(k_1k_2h_2 - q_{22}k_1 - q_{21}k_1^2\bar{\alpha}_{12})|z_2| - k_1h_2|z_3| \right. \\ &\quad \left. - q_{21}k_1^2\beta_{12} - d_2 \right]\end{aligned}$$

qué es negativa si

$$(k_1k_2h_2 - q_{22}k_1 - q_{21}k_1^2\bar{\alpha}_{12})|z_2| - k_1h_2|z_3| - q_{21}k_1^2\beta_{12} - d_2 > 0.$$

Entonces, el estado finalmente entra en el dominio del subespacio (z_1, z_2, z_3) , definido por

$$|z_2| \leq \bar{\alpha}_{23}|z_3| + \beta_{23}$$

y consecuentemente

$$|z_1| \leq \bar{\alpha}_{13}|z_3| + \beta_{13}$$

donde los parámetros escalares $\bar{\alpha}_{23}$, β_{23} , $\bar{\alpha}_{13}$ y β_{13} , definidos como

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{23} &= \alpha_{23}k_1h_2, \quad \alpha_{23} = (k_1k_2h_2 - q_{22}k_1 - q_{21}k_1^2\bar{\alpha}_{12})^{-1}, \quad \bar{\alpha}_{13} = \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{23} \\ \beta_{23} &= \alpha_{23}(q_{21}k_1^2\beta_{12} + d_2), \quad \text{y}, \quad \beta_{13} = \bar{\alpha}_{12}\beta_{23} + \beta_{12}\end{aligned}$$

son positivos si los valores de k_1 y k_2 satisfacen las siguientes desigualdades

$$k_1 > h_1^{-1}q_{11} \quad \text{y} \quad k_2 > h_2^{-1}(q_{22} + q_{21}k_1\bar{\alpha}_{12}) \quad (13)$$

En el tercer paso, siguiendo pasos similares a los del primer bloque, la derivada \dot{V}_3 de la función candidata de Lyapunov calculada en las trayectorias del tercer bloque de (8a)-(8c), bajo las condiciones (10a), (10b) y (13), esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= -k_3\bar{b}_3(\bar{z}_2, k_1, r)z_3^2 + \bar{b}_3(\bar{z}_2, k_1, r)z_3z_4 + z_3\bar{g}_3(\bar{z}_3, \bar{k}_2, r, w) \\ \dot{V}_3 &\leq -|z_3| \left[-q_{31}k_1^2k_2|z_1| - q_{32}k_2^2|z_2| + (k_3|\bar{b}_3(\bar{z}_2, k_1, r)| \right. \\ &\quad \left. - q_{33}k_2)|z_3| - |\bar{b}_3(\bar{z}_2, k_1, r)||z_4| - d_3 \right] \\ \dot{V}_3 &\leq -|z_3| \left[(k_2k_3h_3 - q_{33}k_2 - q_{31}\bar{\alpha}_{13}k_1^2k_2 - q_{32}\bar{\alpha}_{23}k_1k_2^2h_2)|z_3| \right. \\ &\quad \left. - k_2h_3|z_4| - q_{31}\beta_{13}k_1^2k_2 - q_{32}k_2^2\beta_{23} - d_3 \right]\end{aligned}$$

qué es negativa si

$$(k_2k_3h_3 - q_{33}k_2 - q_{31}\bar{\alpha}_{13}k_1^2k_2 - q_{32}\bar{\alpha}_{23}k_1k_2^2h_2)|z_3| - k_2h_3|z_4| - q_{31}\beta_{13}k_1^2k_2 - q_{32}k_2^2\beta_{23} - d_3 > 0.$$

De aquí, el estado finalmente entra en el dominio del subespacio (z_1, z_2, z_3, z_4) , definido por

$$|z_3| \leq \bar{\alpha}_{34}|z_4| + \beta_{34}$$

y consecuentemente

$$|z_2| \leq \bar{\alpha}_{24}|z_4| + \beta_{24}$$

$$|z_1| \leq \bar{\alpha}_{14}|z_4| + \beta_{14}$$

donde los parámetros escalares $\bar{\alpha}_{34}$, β_{34} , $\bar{\alpha}_{24}$, β_{24} , $\bar{\alpha}_{14}$, y β_{14} , definidos como

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{34} &= \alpha_{34}k_2h_3, \quad \alpha_{34} = (k_2k_3h_3 - q_{33}k_2 - q_{31}\bar{\alpha}_{13}k_1^2k_2 - q_{32}\bar{\alpha}_{23}k_1k_2^2h_2)^{-1}, \\ \bar{\alpha}_{24} &= \bar{\alpha}_{23}\bar{\alpha}_{34}, \quad \bar{\alpha}_{14} = \bar{\alpha}_{13}\bar{\alpha}_{34}, \\ \beta_{34} &= \alpha_{34}(q_{31}\beta_{13}k_1^2k_2 - q_{32}\beta_{23}k_2^2 - d_3), \quad \beta_{24} = \bar{\alpha}_{23}\beta_{34} + \beta_{23}, \quad \text{y},\end{aligned}$$

$\beta_{14} = \bar{\alpha}_{13}\beta_{34} + \beta_{13}$ son positivos si los valores de k_1 , k_2 , y k_3 , satisfacen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}k_1 &> h_1^{-1}q_{11}, \quad k_2 > h_2^{-1}(q_{22} + q_{21}k_1\bar{\alpha}_{12}), \quad \text{y} \\ k_3 &> h_3^{-1}(q_{33} + q_{31}\bar{\alpha}_{13}k_1^2 + q_{32}\bar{\alpha}_{23}k_2^2)\end{aligned} \quad (14)$$

Siguiendo un procedimiento similar, para el $(i-1)$ -ésimo bloque del sistema (8a)-(8c), el dominio de convergencia, en el subespacio $(z_1, z_2, \dots, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i)$, es

$$\begin{aligned}|z_1| &\leq \bar{\alpha}_{1,i}|z_i| + \beta_{1,i} \\ |z_2| &\leq \bar{\alpha}_{2,i}|z_i| + \beta_{2,i} \\ |z_{i-1}| &\leq \bar{\alpha}_{i-1,i}|z_i| + \beta_{i-1,i}\end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\bar{\alpha}_{j,i} = \bar{\alpha}_{j,i-1}\bar{\alpha}_{i-1,i}, \quad \alpha_{i-1,i} = \alpha_{i-1,i}k_{i-2}h_{i-1},$$

$$\alpha_{i-1,i} = \left(k_{i-2}k_{i-1}h_{i-1} - q_{i-1,i-1}k_{i-2} - \sum_{j=1}^{i-2} q_{i-1,j}\alpha_{j,i-1}k_j^2k_{j+1}^{i-2-j} \right)^{-1},$$

$$\beta_{i-1,i} = \alpha_{i-1,i} \left(\sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j q_{i-1,j}\beta_{j,i-1}k_j^2k_{j+1}^{i-2-j} + d_{i-1} \right),$$

$$\beta_{j,i} = \bar{\alpha}_{j,i-1}\beta_{j,i-1} + \beta_{j,i-1}, \quad j = 1, \dots, i-2.$$

En el siguiente paso, tomando de nuevo la derivada de la función de Lyapunov $V_i = \frac{1}{2}z_i^2$ en las trayectorias del i -ésimo bloque de (8a)-(8c), y usando (10a)-(10d), obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= -k_i z_i^2 + z_i [z_{i+1} + \bar{g}_i(z_1, \dots, z_i)w] \\ &\leq -k_i z_i^2 + |z_i| \left(|z_{i+1}| + q_{i,i}|z_i| + \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{i-j} q_{i,j} |z_j| + d_i \right).\end{aligned}$$

Usando ahora (11), podemos reacomodar \dot{V}_i como

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &\leq -|z_i| \left[\left(k_i - q_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} q_{i,j} \bar{\alpha}_{j,i} \right) |z_i| - |z_{i+1}| \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} q_{i,j} \beta_{j,i} - d_i \right]\end{aligned} \quad (16)$$

De esta ecuación, se sigue que

$$|z_i| \leq \bar{\alpha}_{i,i+1}|z_{i+1}| + \beta_{i,i+1}$$

donde los parámetros

$$\bar{\alpha}_{i,i+1} = \left(k_i - q_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} q_{i,j} \bar{\alpha}_{j,i} \right)^{-1} \quad \text{y}$$

$$\beta_{i,i+1} = \bar{\alpha}_{i,i+1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} q_{i,j} \beta_{j,i} - d_i \right), \quad i = 4, \dots, n-1$$

son positivos si la condición

$$k_i > q_{i,i} + \sum_{j=1}^{i-1} k_j^{(i-j)} q_{i,j} \alpha_{j,i} \quad (17)$$

se mantiene. La sustitución de (16) en (14) da el siguiente conjunto de desigualdades para el subespacio $(z_1, z_2, \dots, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i, z_{i+1})$:

$$\begin{aligned}|z_1| &\leq \alpha_{1,i+1}|z_i| + \beta_{1,i+1} \\ |z_2| &\leq \alpha_{2,i+1}|z_i| + \beta_{2,i+1} \\ |z_{i-1}| &\leq \alpha_{i-1,i+1}|z_i| + \beta_{i-1,i+1} \\ |z_i| &\leq \alpha_{i,i+1}|z_{i+1}| + \beta_{i,i+1}\end{aligned} \quad (18)$$

donde

$$\alpha_{j,i+1} = \alpha_{j,i}\alpha_{i,i+1} \quad \text{y} \quad \beta_{j,i+1} = \alpha_{j,i}\beta_{i,i+1} + \beta_{j,i}, \quad j = 1, \dots, i, e,$$

$$i = 4, \dots, n-1.$$

En el último paso, obtenemos el dominio de convergencia, en el subespacio $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$, definido por las siguientes desigualdades:

$$|z_i| \leq \alpha_{i,n-1}|z_{n-1}| + \beta_{i,n-1}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Estas expresiones se usan para evaluar la derivada de la función candidata de Lyapunov $V_{n-1} = \frac{1}{2} z_{n-1}^2$ a lo largo de las trayectorias de (4c), esto es

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &= -k_{n-1} z_{n-1}^2 + z_{n-1} g_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) w \\ &\leq -k_{n-1} z_{n-1}^2 + |z_{n-1}| \left(q_{n-1, n-1} + \sum_{j=1}^{r-2} k_j^{n-1-j} q_{r-1, j} |z_j| + d_{n-1} \right) \\ &\leq -\left(k_{n-1} - q_{r-1, n-1} - \sum_{j=1}^{r-2} k_j^{(n-1-j)} q_{r-1, j} \alpha_{j, n-1} \right) |z_{n-1}|^2 \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{r-2} k_j^{(n-1-j)} q_{r-1, j} \beta_{j, n-1} + d_{r-1} \right) |z_{n-1}| \end{aligned}$$

Si se elige k_{n-1} tal que se mantenga la condición

$$k_{n-1} > q_{n-1, n-1} + \sum_{j=1}^{r-2} k_j^{(n-1-j)} q_{n-1, j} \alpha_{j, n-1}, \quad (19)$$

entonces obtenemos

$$\dot{V}_{n-1} = -2\alpha_{n-1} V_{r-1} + \beta_{n-1} \sqrt{2V_{n-1}}$$

con constantes positivas

$$\alpha_{n-1} = k_{n-1} - q_{n-1, n-1} - \sum_{j=1}^{n-2} k_j^{(n-1-j)} q_{n-1, j} \alpha_{j, n-1} \quad y$$

$$\beta_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} k_j^{(n-1-j)} q_{n-1, j} \beta_{j, n-1} + d_{n-1}.$$

Por el Lema de Comparación [5], tenemos

$$|z_{n-1}(t)| \leq \gamma_{n-1, n-1} \exp\left[\frac{1}{2} \alpha_{n-1} (t - t_0)\right] + h_{n-1} \quad (20)$$

donde $\gamma_{n-1, n-1} = |z_{n-1}(t_0)| - h_{n-1}$, y $h_{n-1} = \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}$. Así

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |z_{n-1}(t)| \leq h_{n-1}. \quad (21)$$

Por lo tanto, usando las cotas obtenidas superior (20) y final (21) en la solución $z_{n-1}(t)$, las desigualdades (18), y calculando desde el $(n-1)$ -ésimo hasta el primer bloque de (8a)-(8c), podemos encontrar paso a paso las cotas para las soluciones $z_{n-2}(t)$, $z_{n-3}(t)$, ..., $z_1(t)$.

Para reducir el efecto de la acción de las perturbaciones desconocida en (5), es decir, asegurar las desigualdades (15), (17) y (19) para las cotas dadas (10a)-(10d), y, respectivamente, aumentar la región de estabilidad del modo deslizante (7), es necesario aumentar el valor de la ganancia del controlador k_n en (6).

Esta alta ganancia, sin embargo, puede producir castañeteo debido a imperfecciones en los dispositivos de control. Para resolver este problema, proponemos ajustar el valor de la ganancia k_n dependiendo del valor de s y del control equivalente u_{eq}

$$u_{eq} = \bar{b}_n^{-1}(\mathbf{z}) [\bar{f}_n(\mathbf{z}) + \bar{g}_n(\mathbf{z}) w]$$

Para el caso de perturbaciones desconocidas el valor de u_{eq} puede obtenerse filtrando la señal de control como [12]

$$\tau \dot{u}_{eq} + u_{eq} = u$$

La modificación de la ganancia k_n puede hacerse usando un esquema de lógica difusa. Para el caso de control acotado, el valor de k_n inicia con $k_n = k_{n, \max}$ y entonces, cuando s tiende a cero, el valor de k_n decrece suavemente hasta $k_n = k_{n, \min}$, evitando el castañeteo.

En la Figura 1 se muestra el diagrama de bloques del sistema de lazo cerrado con transformación por bloques y controlador con modo deslizante y lógica difusa (SMFLC_{BC}), y consiste de las siguientes partes:

Control por bloques. Este bloque transforma los estados x en las nuevas coordenadas z

$$T_{BC} : x \rightarrow z, \text{ tal que } z = T_{BC}(x)$$

donde el mapeo T_{BC} está definido por (6a)-(6d), y calcula el valor de las siguiente variables:

$$s = z_n \quad y \quad u_{eq} = \bar{b}_n^{-1}(\mathbf{z}) [\bar{f}_n(\mathbf{z}) + \bar{g}_n(\mathbf{z}) w].$$

Controlador difuso. Este bloque usa únicamente dos entradas: $In_1 = |s|$ e $In_2 = |u_{eq}|$, y determina la ganancia k_n tal que satisface la condición de estabilidad (7). Este controlador consiste de los siguiente componentes:

Normalización, el cual escala las entradas.

Fusificación, que transforma los valores de las entradas no difusas en valores fusificados

$$F : In_i \rightarrow LIn \text{ tal que } F(In_i) = LIn(i, j)$$

donde $In_i \in In$ es un valor de entrada no difuso definido en el universo de discurso In , y $LIn(i, j)$ es el valor fusificado de la entrada correspondiente.

Mecanismo de Inferencia, que usa el siguiente tipo de reglas:

$$\text{Rule } m: \text{ If } (Lin(1, j) \text{ and } Lin(2, k)) \text{ Then } CR(j, k)$$

donde $CR(j, k)$ es el valor correspondiente de la ganancia k_d en el consecuente de la regla.

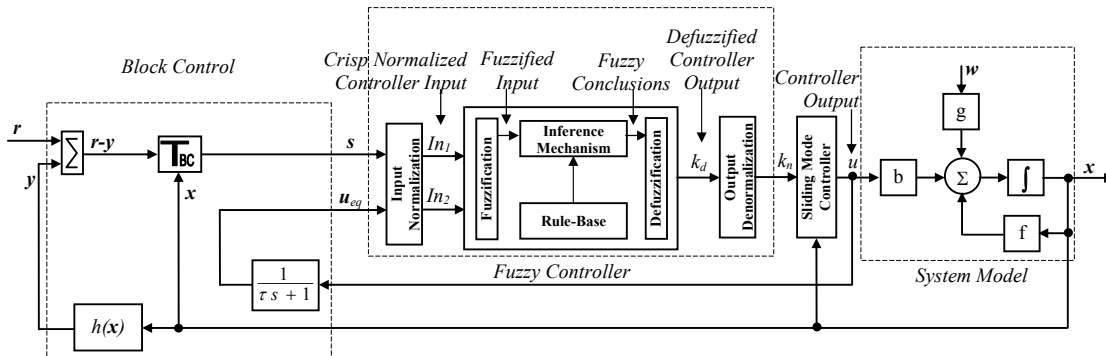


Figure 1. Block Diagram

Defusificación, basada en el método de defusificación de peso medio [4] produce un valor escalar k_d , calculado como

$$k_d = \frac{\sum_{j=1}^{ne_1} \sum_{k=1}^{ne_2} LAnt(j, k) CR(j, k)}{\sum_{j=1}^{ne_1} \sum_{k=1}^{ne_2} LAnt(j, k)}$$

donde $LANt(j, k) = \min(LIn(1, j), LIn(2, k))$ es la cuantificación de la premisa de la regla activa, y ne_i para $i=1,2$, es el tamaño del conjunto difuso.

Denormalization la cual multiplica las salidas normalizadas del controlador difuso con el factor de denormalización (escala), $k_n = k_d \cdot scale$ tal que el sistema (5) permanece estable.

Controlador de modo deslizante. Este bloque implementa (6) para obtener u con la k_n obtenida en el controlador difuso.

3. Control del Motor a Pasos.

En esta sección, se aplica el esquema propuesto para controlar un motor de pasos de imán permanente. Su modelo matemático [14] esta dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{J}[-K_m i_a \sin(N_r \theta) + K_m i_b \cos(N_r \theta) - B_v \omega - \tau_l] \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{1}{L}[-R i_a - K_m \cos(N_r \theta) + u_a] \\ \frac{di_b}{dt} &= \frac{1}{L}[-R i_b + K_m \cos(N_r \theta) + u_b] \end{aligned} \quad (22)$$

donde, θ es la posición angular; ω es la velocidad de la flecha del motor; i_a e i_b son las corrientes en las fases A y B respectivamente; u_a y u_b son los voltajes en las fases A y B , respectivamente; J es el momento de inercia; R y L son la resistencia e inductancia en cada uno de los bobinados de las fases, N_r es el número de dientes del rotor, K_m es la constante del par del motor, B_v es la fricción viscosa y τ_l es el par de la carga y presenta la perturbación desconocida pero acotada.

Seleccionando las siguientes variables de estado, $x_1 = \theta$, $x_2 = \omega$, $x_3 = i_b$, y, $x_4 = i_a$, el sistema (22) queda representado como un sistema controlable a bloques que consta de tres bloques, y sujeto a la perturbación desconocida $\tau_l = w_1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -a_2 x_2 + b_1(x_1) x_3 - b_2(x_1) x_4 - d_2 w_1 \\ \begin{bmatrix} -a_3 x_3 - c_1 b_1(x_1) x_2 \\ -a_4 x_4 + c_1 b_2(x_1) x_2 \end{bmatrix} + b_0 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $a_2 = \frac{B}{J}$, $b_1(x) = \frac{K_m}{J} \cos(N_r \theta)$,

$$b_2(x_1) = \frac{K_m}{J} \sin(N_r \theta), \quad d_1 = \frac{1}{J}, \quad a_3 = a_4 = \frac{R}{L}, \quad c_1 = \frac{J}{L}.$$

Suponga que la salida $y = x_1$ es requerida para que siga a la señal de referencia x_{1ref} . Siguiendo el procedimiento de

transformación a bloques, primero definimos el error de seguimiento como $z_1 = x_1 - x_{1ref}$, y

$$\dot{z}_1 = x_2 - \dot{x}_{1ref}. \quad (23)$$

Entonces se introduce la dinámica deseada para z_1 como

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2. \quad (24)$$

Resolviendo (23) y (24) para z_2 , obtenemos

$$z_2 = k_1 x_1 + x_2 - k_1 x_{1ref} - \dot{x}_{1ref}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= (k_1 - a_2) x_2 + b_1(x_1) x_3 - b_2(x_1) x_4 \\ &\quad - k_1 \dot{x}_{1ref} - \ddot{x}_{1ref} - d_2 w_1 \end{aligned}$$

De esta ecuación y la dinámica deseada

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + z_3 - d_2 w_1$$

tenemos una nueva variable

$$z_3 = f_3(x_1, x_2) + b_1(x_1) x_3 - b_2(x_1) x_4 + \varphi(t)$$

donde,

$$f_3 = k_1 k_2 x_1 + (k_1 + k_2 - a_2) x_2, \quad y,$$

$\varphi(t) = -k_1 k_2 x_{1ref} - (k_1 + k_2) \dot{x}_{1ref} - \ddot{x}_{1ref}$. Para que la transformación sea no singular, introducimos una nueva variable z_4

$$z_4 = -b_2(x_1) x_3 - b_1(x_1) x_4$$

tal que la matriz $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -b_1(x_1) & -b_2(x_1) \\ -b_2(x_1) & -b_1(x_1) \end{bmatrix}$ tiene rango

completo. Para obtener la acción de control, primero definimos la función de conmutación como

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3(x_1, x_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_1(x_1) & -b_2(x_1) \\ -b_2(x_1) & -b_1(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la proyección del movimiento en el subespacio s_1, s_2 , esta gobernada por

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_3(\mathbf{x}) \\ \bar{f}_4(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + b_0 \mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$; $\bar{f}_3(\mathbf{x})$ y $\bar{f}_4(\mathbf{x})$ son funciones continuas. La estrategia de control se selecciona como

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_2^{-1} \begin{bmatrix} k_3 \text{sign}(s_1) \\ k_4 \text{sign}(s_2) \end{bmatrix}$$

y las condiciones de estabilidad de modo deslizantes son

$$b_0 k_3 > |\bar{f}_3(\mathbf{x}) + \dot{\varphi}(t)| \quad y \quad b_0 k_4 > |\bar{f}_4(\mathbf{x})|$$

Bajo estas condiciones los estados convergen a la variedad deslizante $s_1 = 0, s_2 = 0$, y cuando este variedad se alcanza el movimiento de modo deslizante es descrito por el sistema de segundo orden con perturbación desconocida no desvaneciente.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_2 z_2 + w_1 \end{aligned}$$

Para reducir la influencia de la perturbación, aplicamos el esquema de control con modos deslizantes y lógica difusa descrito en la sección 2 para ajustar la ganancia del controlador k_4 , tal que $k_4 \leq u_0$ con $u_0 > 0$.

4. Resultados de simulación

En esta sección, se presentan resultados de simulación para un motor a pasos de imanes permanentes, con parámetros: $L = 10mH$, $R = 8.4\Omega$, $J = 3.6 \times 10^{-6} Nms^2 / rad$, $k_m = 0.05 Vs / rad$, $N_r = 50$, $B = 1 \times 10^{-4} Nms / rad$. El voltaje máximo de alimentación es $u_0 = 2V$. Las figuras 2 y 3, muestran el comportamiento de los estados (x_1, x_2, x_3, x_4) así como de los nuevos estados (z_1, z_2, z_3, z_4) .

La figura 2 muestra resultados de Seguimiento por Control por Bloques (BCT) en presencia de perturbaciones (0.5 seg, 10%) sin Control con Lógica Difusa (FLC), donde se observa el castañeteo y los efectos de la perturbación. En cambio, la figura 3, muestra resultados de Seguimiento por Control por Bloques (BCT) con Control con Lógica Difusa (FLC) en presencia de perturbaciones (0.5 seg, 10%) usando el método propuesto donde el castañeteo es reducido.

5. CONCLUSIONES

Como puede verse, el desempeño del esquema propuesto es muy alentador. En las simulaciones, supusimos que la perturbación no puede medirse, lo cual es una situación extrema. Sin embargo, el método propuesto de control con modo deslizante jerárquico con lógica difusa mejora el comportamiento del sistema, reduciendo el castañeteo y garantizando la estabilidad.

6. REFERENCIAS

1. Alexík M. and J. Vittek (1994). Adaptive sliding mode control of position servo system. *IFAC Workshop on Sliding Modes*. Smolenice, Slovakia, September 7-10, pp. 278-283.
2. Drajenovic B. (1969). The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 5; 287-295.
3. Drakunov C. V., D.V. Izosimov, A. G. Loukianov, V. I. Utkin (1990). Block control principles I, and, II. *Automation and Remote Control*, 51(5): 601-609; and 51(6): 737-746.
4. Driankov D., H. Hellendoorn, and M. Reinfrank (1996). *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer-Verlag, USA.
5. Khalil H.K. (1996), *Nonlinear Systems*. 2nd. Ed., Prentice-Hall, New-Jersey.
6. Loukianov A.G., (1998). Nonlinear block control with sliding mode. *Automation and Remote Control*, Vol. 59, No. 7, pp. 916-933.
7. Okyay K., K. Erbatur, and M. Ertugrul (2001). The fusion of computationally intelligent methodologies and sliding-mode control-a survey. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 48, pp. 4-17, No. 1, February 2001.
8. Palm R., D. Driankov, and H. Hellendoorn . (1997). *Model Based Fuzzy Control - Fuzzy Gain Schedulers and Sliding Mode Fuzzy Controllers*. Springer-Verlag, Germany.
9. Q. P. Ha, Q. H. Nguyen, D. C. Rye, and, H. F. Durrant-Whyte (2001). Fuzzy sliding-mode controllers with applications. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 48, pp. 38-46, No. 1.

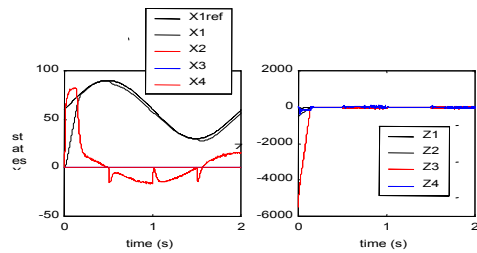


Figure 2: BCT with disturbances without FLC.

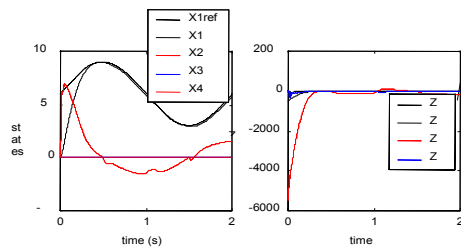


Figure 3: BCT with FLC and disturbances

10. Scibile L., and B. Kouvaritakis (2001). A discrete adaptive near-time optimum control for the plasma vertical position in a Tokamak. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, vol. 9, No.1., pp. 148-162.
11. Utkin V.I. (1992). *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, USA.
12. Utkin V. I., J. Guldner, and J. Shi (1999). *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis.
13. Wong L. K., H. F. Leung, and K. S. Tam (2001). Fuzzy sliding controller for nonlinear systems. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 48, No. 1, pp. 32-37.
14. Zribi M. and J. N. Chiasson (1991). Position control of a PM stepper motor by exact linearization. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 36, 620-625.